人生いろいろ，量子化もいろいろ

戸田　晃一
（工学部教養教育）

キーワード: (変形) 量子化，　スター積，　調和振動子

1. 緒言

『とあるアジアの国の流行歌 や 首相の正式な場での発言にもあるように「人生いろいろ」である。私のこれまでの人生を振り返っても本当にそう感じる。高校を卒業し，家業である生花業を二年ほど継いだ。その後，深く考えることなく大学に入り，いつの間にやら富山にいる。しかし，この大学激動・激変の時代に生きる者として，これからもまたどこかにいくことになるかもしれないことを覚悟している。これまでにいろいろな人たちと出会い影響されながら生きてきた。研究の興味もいろいろ変遷してきた．現在の研究分野は … 』と前巻の紀要論文で書き始めた [1]。この文章の表現やその表題で，いろいろとご批判を受けた。しかし，普段の心構えや研究を通して感じたことをありのままに表現しただけであり，結構気に入っているので，今回も同様の表題とし，書き始めも前回のものを引用した。

今回は量子化について書きたいと思っている。何故「量子化」か？

実は，2004 年 10 月より 2005 年 2 月まで旧富山医科薬科大学において特殊相対論 と 量子力学に関する講義を行った。また，2005 年 3 月と 8 月に中国科学院（北京）において大学院生（応用数学系）向けに（変形）量子化に関する入門的な講義を行った。そこで，北京での講義用に英語で用意した板書ノートを，日本語で紀要原稿として残しておくことにした。

ところで「量子化とは何か？」と学生に質問された時には，

$$\boxed{\text{古典系から量子系を得るための}\textbf{手続き}}$$

であると答えることにしている。以前に，著者が立命館大学での助手をしていた時に「統計物理学」の演習を担当していた。ある日，学生から同様の質問をされた物性物理学を専門とする講義担当教員が「神社仏閣に行った時に，訳も分からず手を合わして拝むように，とりあえずは量子化もその手順にただ従えばよい。そうすれば，量子の世界の計算ができるのだ。」と答えていたことをよく思い出す。これはすごく言い当てている。[1]

今回は，一次元の調和振動子を唯一の例として，**正準量子化** や 最先端の量子化の研究である**変形量子化**について紹介することに挑戦する。本小論を通して，量子化という手続きは，単に大学で習う**正準量子化**だけではないことを知っていただきたい。（それでは，古典力学における解析力学の復習からこの小論は書き始めたい。）

2. 解析力学の簡単な復習

空間一次元（$q = q(t)$）の場合の Lagrange 形式，Hamilton 形式 及び Poisson 括弧について，量子化に関係する部分だけ抜き出して，復習する [2, 3, 4, 5]。(N 自由度の場合は，Appendix A に簡単にまとめた。)

2-1. Lagrange 形式

Lagrangian L は，関数 $L = L(q, \dot{q})$ で，Euler-Lagrange 方程式：

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0 \tag{1}$$

[1] もちろん，その教員も「量子化とは何か？」という非常に基本的な問いを否定しているわけではない。「宗教と同様に，量子化とは思想・哲学的な要素を含むものであり，学習の初期段階で悩むと全然受け入れられないものになる。…」と本人はアドヴァイスしているつもりであるが，話し下手なので，上記のような物言いになったことを著者は知っている。

を満たしている。但し，t を時刻，$q(=q(t))$ を一般化座標及び $\dot{q}(\equiv dq/dt)$ を一般化速度とする。一方，Lagrangian を用いて，作用（積分）S を

$$S = S(q,\dot{q}) \equiv \int_{t_i}^{t_f} L(q,\dot{q})dt \tag{2}$$

と定義すると，Euler-Lagrange 方程式 (1) を導くことができる。これを見ていく。（ここで，時刻 $t_i \leqq t \leqq t_f$ とする。また，$q(t)$ を $q(t_i)=q_i$，$q(t_f)=q_f$ を満たす任意の経路とみる。）作用の変分を計算すると，

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{t_i}^{t_f} L(q+\delta q,\dot{q}+\delta\dot{q})dt - \int_{t_i}^{t_f} L(q,\dot{q})dt \\ &= \int_{t_i}^{t_f} \left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)\delta q dt \end{aligned} \tag{3}$$

となる。実際に起こる運動は，S に停留値を与えることを要請（Hamilton の原理 または 変分原理）すると，δq は任意なので，被積分関数は Euler-Lagrange 方程式 (1) を満たすことになる[2]。

一般化運動量 p を

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \tag{4}$$

で定義すると，Euler-Lagrange 方程式 (1) は

$$\dot{p} = \frac{\partial L}{\partial q} \tag{5}$$

と書き直すことができる。

（例）　一次元調和振動子

k をバネ定数とすると，一次元調和振動子のポテンシャルエネルギーは

$$V(x) = -\frac{k}{2}x^2 \tag{6}$$

である。（一次元座標を x とする。）いま，一次元の調和振動子（m：質量）の Lagrangian が

$$L(x,\dot{x}) = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - \frac{k}{2}x^2 \tag{7}$$

で与えられるとする。実際，

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = -kx\ (=\dot{p}), \\ \dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}\ (=p) \end{cases} \tag{8}$$

より，一次元調和振動子の運動方程式：

$$m\ddot{x} = -kx \tag{9}$$

を得る。よって，一次元調和振動子の Lagrangian (7) は妥当である。

Euler-Lagrange 方程式 (1) が Newton の運動方程式と一致することを要請すると，だいたいの力学系に対する Lagrangian は運動エネルギー（$m\dot{q}/2$）とポテンシャルエネルギー（$V(q)$）の差：

$$L(q,\dot{q}) = \frac{m}{2}\dot{q}^2 - V(q) \tag{10}$$

で書かれる。このとき，

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial q} = -\dfrac{\partial V(q)}{\partial q}\ (=\dot{p}) \quad : \text{力}, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m\dot{q}\ (=p) \quad : \text{運動量} \end{cases} \tag{11}$$

である。よって，Euler-Lagrange 方程式 (1) は

$$m\ddot{q} = -\frac{\partial V(q)}{\partial q} \tag{12}$$

となり，確かに Newton の運動方程式となっている。

2-2. Hamilton 形式

Lagrange 形式は，運動方程式として二階の微分方程式を与える。一方，Hamilton 形式では，運動方程式は一階の微分方程式で与えられるので，取り扱いに便利である[3]。

Hamiltonian H は，関数 $H=H(q,p)$ で，

$$H(q,p) \equiv p\dot{q} - L(q,\dot{q}) \tag{13}$$

と定義する。Hamiltonian H の微小変換を考えると

$$\begin{aligned} \delta H &= (\delta p)\dot{q} + p\delta\dot{q} - \frac{\partial L}{\partial q}\delta q - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta\dot{q} \\ &= (\delta p)\dot{q} - \frac{\partial L}{\partial q}\delta q + \left(p - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)\delta\dot{q} \\ &= \dot{q}\delta p - \frac{\partial L}{\partial q}\delta q \end{aligned} \tag{14}$$

である。但し，$\delta\dot{q}$ の項は一般化運動量の定義 (4) を用いて消去した。よって，$\delta H(q,p)$ は δq と δp の変化の

[2] 作用汎関数から，Euler-Lagrange 方程式 (1) を導くこともできる。

[3] Hamilton 形式のより本質的に重要な点は，symplectic 構造と呼ばれる古典力学がもつ非常に重要な数学的構造が陽に見えてくることである。

みで与えられるので

$$\begin{cases} \dfrac{\partial H}{\partial p} = \dot{q}, \\ \dfrac{\partial H}{\partial q} = -\dfrac{\partial L}{\partial q} \end{cases} \tag{15}$$

が得られる。(しかし，これはまだ単に独立変数の置き換えに過ぎない。) ここで更に Euler-Lagrange 方程式 (5) より，Hamilton の運動方程式：

$$\begin{cases} \dot{q} = \dfrac{\partial H}{\partial p}, \\ \dot{p} = -\dfrac{\partial H}{\partial q} \end{cases} \tag{16}$$

が得られる。

(例)　一次元調和振動子

一次元調和振動子の Lagrangian (7) より，

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \tag{17}$$

なので，

$$\dot{x} = \frac{p}{m} \tag{18}$$

となる。よって，一次元調和振動子の Hamiltonian は

$$\begin{aligned} H(x,p) &\equiv p\dot{x} - L(x,\dot{x}) \\ &= p\left(\frac{p}{m}\right) - \left\{\frac{m}{2}\left(\frac{p}{m}\right)^2 - \frac{k}{2}x^2\right\} \\ &= \frac{p^2}{2m} + \frac{k}{2}x^2 \end{aligned} \tag{19}$$

と与えられる。このとき，Hamilton の運動方程式は

$$\begin{cases} \dot{q} = \dfrac{\partial H}{\partial p} = \dfrac{p}{m}, \\ \dot{p} = -\dfrac{\partial H}{\partial x} = -kx \end{cases} \tag{20}$$

となる[4]。

2-3. Poisson 括弧

任意関数 $f = f(q,p)$ 及び $g = g(q,p)$ について，Poisson 括弧を

$$\{f,\ g\}_{\mathrm{P}} \equiv \frac{\partial f}{\partial q}\cdot\frac{\partial g}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial p}\cdot\frac{\partial g}{\partial q} \tag{21}$$

と定義する[5]。基本となる Poisson 括弧は

$$\begin{cases} \{q,q\}_{\mathrm{P}} = \{p,p\}_{\mathrm{P}} = 0, \\ \{q,p\}_{\mathrm{P}} = 1 \end{cases} \tag{22}$$

である。

物理量 $\mathcal{F} = \mathcal{F}(t,q,p)$ の時間変化は，Poisson 括弧を使って，

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{F}}{dt} &= \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial q}\cdot\dot{q} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial p}\cdot\dot{p} \\ &= \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial q}\cdot\frac{\partial H}{\partial p} - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial p}\cdot\frac{\partial H}{\partial q} \\ &= \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} + \{\mathcal{F},H\}_{\mathrm{P}} \end{aligned} \tag{23}$$

となる。ここで，$\mathcal{F}(t,q,p) = \mathcal{F}(q,p)$ のとき，つまり $\mathcal{F}$ が t にあらわに依らないときには，

$$\frac{d\mathcal{F}}{dt} = \{\mathcal{F},H\}_{\mathrm{P}} \tag{24}$$

と書くことができる[6]。(途中の式変形で，Hamilton の運動方程式 (16) を用いている。) もし，

$$\{\mathcal{F},H\}_{\mathrm{P}} = 0 \tag{25}$$

であれば，$\mathcal{F}$ は保存量である。つまり，任意の運動に対して

$$\frac{d\mathcal{F}}{dt} = 0 \tag{26}$$

である。このとき，Hamilton の運動方程式 (16) は

$$\begin{cases} \dot{q} = \{q,H\}_{\mathrm{P}}, \\ \dot{p} = \{p,H\}_{\mathrm{P}} \end{cases} \tag{27}$$

と書くことができる。

3. 正準量子化

大学で量子論や量子力学を習う場合には，ほぼ間違いなく**正準量子化**を習うであろう[7]。座標を q，運動量を p に対する次の交換子：

$$[q,p] \equiv qp - pq = i\hbar \tag{28}$$

[4] 前者は運動量の定義であり，後者は Newton の運動方程式である。

[5] この Poisson 括弧が Lie 括弧の一つであることは容易に確かめることができる。

[6] この関係より，H は時間発展の無限小生成子といわれる。

[7] 最近出版される書籍を見ていると，いきなり Schrödinger 方程式から始めるといった少し乱暴なやりかたもあるようである …。

が正準量子化と呼ばれる一連の手続きの全てであるといってもよい。同様に，時刻 t，系の全エネルギー E に対しても

$$[E,t]=i\hbar \tag{29}$$

となっているとする。ここで，$\hbar$ とは，Planck 定数と呼ばれる普遍定数：

$$\hbar\equiv\frac{h}{2\pi}=1.05\times10^{-34}\quad[\mathrm{J\cdot s}] \tag{30}$$

であり，作用の次元をもっている[8]。さて，交換子に出てくる変数 (q,p) と (E,t) の組を見ていて気づくことがある。それはこれらの組が，**正準変数**と呼ばれるものであるということである[9]。よって，これらの関係を**正準交換関係**と呼ぶ。

それでは，**正準量子化**と呼ばれている手続きを説明する。簡単のため，空間座標が一次元の場合のみに話を限定する。また，Schrödinger 表示のみを考える。(Heisenberg 表示は本小論では触れない。）この条件だと，話は非常にシンプルである。

1. 微分演算子化：

正準交換関係を満たすように，q または p を演算子化すればよい。ここでは，p を微分演算子化して，

$$\hat{p}=-i\hbar\frac{\partial}{\partial q} \tag{31}$$

とする。同様にして，E を微分演算子化して，

$$\hat{E}=i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \tag{32}$$

とする。

2. 古典力学系に代入：

ポテンシャルエネルギー $V(q)$ 中にある質量 m の粒子の全エネルギー E は，古典力学に従えば，

$$E=\frac{p^2}{2m}+V(q) \tag{33}$$

と与えられるので，演算子 $\hat{p}$ 及び $\hat{E}$ を代入すると，

$$\hat{E}=\frac{\hat{p}^2}{2m}+V(q) \tag{34}$$

を得る。ここで一つ注意が必要である。関係式 (34) は既に演算子化されているので，何か被演算子を考えないといけない。そこで登場してくるのが，波動関数 $\Psi=\Psi(t,q)$ である[10]。よって，被演算子 Ψ を考慮して，関係式 (34) を微分演算子で書き換えると，

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(t,q)=\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial q^2}+V(q)\right]\Psi(t,q) \tag{35}$$

を得る。これは**時間に依存する Schrödinger 方程式**と呼ばれるものである。これが量子系の運動方程式に対応するものである。量子化の手続きはこれで終了である。

3. Schrödinger 方程式を解く：

量子化することで得られた（時間に依存する）Schrödinger 方程式は，具体的にポテンシャルエネルギー $V(q)$ の形が分からないと解けない。(具体的に分かってもなかなか完全に解くことは難しいのが現実である。)

ここでは，波動関数が特殊な（しかし，応用範囲が広い）場合について考察する。いま波動関数 $\Psi(t,q)$ が，

$$\Psi(t,q)=\psi(t)\phi(q) \tag{36}$$

なる変数分離系で書けたとする。すると，時間に依存する Schrödinger 方程式 (35) の左辺は

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(t,q)=i\hbar\phi(q)\frac{d\psi(t)}{dt} \tag{37}$$

となり，右辺は

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial q^2}+V(q)\right]\Psi(t,q)=\psi(t)\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dq^2}+V(q)\right]\phi(q) \tag{38}$$

となる。よって，

$$i\hbar\frac{\psi(t)}{\psi(t)}=\frac{-\frac{\hbar^2}{2m}\phi''(q)+V(q)\phi(q)}{\phi(q)}\quad\left(=\mathcal{E}\right) \tag{39}$$

なる関係式を得る。関係式 (39) の左辺は時刻 t の関数から，右辺は座標 q の関数からなる比である。よって，それらの比が等しくなるには，ある定数[11] でなければならない。このある定数比を $\mathcal{E}$ だと考える。よって，関係式 (39) は

$$i\hbar\psi(t)=\mathcal{E}\psi(t) \tag{40}$$

[8] 歴史的には，h を Planck 定数と呼ぶのが妥当ではあるが …。
[9] 運動量 (p) は座標 (q) に対して不変であり，全エネルギー (E) は時間 (t) に対して不変である。
[10] 量子論を考慮しなければならない物理系（粒子）を考えている。それは，de Broglie の理論により，粒子と波動の二重性をもつ世界である。そこで，その波動性に着目して波動関数を考えるのである。
[11] つまり，t にも q にも依存してはいけない。

という時間に依存した微分方程式と，

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\phi''(q)+V(q)\phi(q)=\mathcal{E}\phi(q) \tag{41}$$

という座標に依存した微分方程式に分離できる。前者はすぐに解けて，

$$\psi(t)=\psi_0\exp\left[\frac{\mathcal{E}}{i\hbar}t\right] \tag{42}$$

を解としてもつ。但し，ψ_0 は任意定数である。但し，いま $\mathcal{E}$ の具体的な形は不明のままであることに注意してほしい。それでは，$\mathcal{E}$ の具体的な形はどこから出すかというと，後者の **定常状態の Schrödinger 方程式**と呼ばれる二階の微分方程式より導き出すことになる。次に定常状態の Schrödinger 方程式が具体的に解ける例として，一次元調和振動子をここでも考える。

（例）　一次元調和振動子

一次元の調和振動子の場合[12] には，定常状態の Schrödinger 方程式は

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\phi''(x)+\frac{x^2}{2}\phi(x)=\mathcal{E}\phi(x) \tag{43}$$

となる。これはエルミート多項式を用いて具体的に書けるが，本小論では略す。エネルギー $\mathcal{E}$ のみ結果を記すと，$n(=0,1,,2,\cdots)$ を用いて，

$$\mathcal{E}=\mathcal{E}_n=n+\frac{1}{2} \tag{44}$$

のように量子化されたエネルギーが求まる。

本小論では，量子化の手続きを紹介することを目的としているので，波動関数の物理的意味（統計的解釈，規格化，期待値）や生成・消滅演算子などは割愛する。

（補足）　経路積分による量子化

経路積分による量子化による確率振幅は

$$<q_f,t_f|q_i,t_i>=\int\exp\left[\frac{i}{\hbar}S(q)\right]\mathcal{D}q \tag{45}$$

と書ける[13]。厳密に経路積分が実行できる系の例として，やはり一次元調和振動子の量子化がある。しかし，紙数の関係でこれ以上述べることはできない。興味のある方は [2, 6] を参照してほしい。

[12] 簡単のため，$k=1$ とする。
[13] $\hbar\to 0$ で寄与する経路は，作用 S の停留点，すなわち Euler-Lagrange 方程式の解のみとなる。

5. 変形量子化 -Moyal 量子化-

何故正準量子化（や 経路積分）は，古典力学系をうまく量子化できるのであろうか？その答えを Poisson 括弧 と 正準交換関係の類似性に見出そうとしている研究分野が理論物理学にあり，近年非常に活発に議論されている。その研究分野は**変形量子化**と呼ばれ，正準変数を演算子化せずに，正準交換関係を満たすような Poisson 括弧の**変形**を考えるというものである。

まず大上段に振りかぶって，(Poisson 多様体上の) 変形量子化を定義する [7, 8, 9]。そして，変形量子化のプロトタイプである，Moyal 量子化を紹介する。

5-1. 変形量子化

$C^\infty(M)$ を可換環とする。変形パラメータ $\hbar$ による $C^\infty(M)$ 係数の形式的巾級数で得られる線形空間を，$C^\infty(M)[\hbar]$ とする。つまり，その元 $f\in C^\infty(M)[\hbar]$ は

$$f=\sum_{k=0}^{\infty}\hbar^k f_k,\quad f_k\in C^\infty(M) \tag{46}$$

で与えられる。(形式的) **変形量子化**とは，以下のような結合積[14] $\star$：

$$f\star g=\sum_{k=0}^{\infty}\hbar^k M_k(f,g) \tag{47}$$

を $C^\infty(M)[\hbar]$ 上に導入することである。ここで，M_k は local な双微分演算子で，条件：

$$M_0(f,g)=fg, \tag{48}$$
$$M_1(f,g)-M_1(g,f)=-i\{f,g\}_{\mathrm{P}} \tag{49}$$

を満たし，$\hbar$ は Planck 定数に相当するパラメータである。条件 (48) は，$\star$ 積が可換積の $\hbar$ による変形であること意味している。よって，極限 $\hbar\to 0$ で元の可換環 $C^\infty(M)$ に戻る。また，条件 (49) は，$\star$ 積に関する交換子が

$$[f,g]_\star\equiv f\star g-g\star f=-i\hbar\{f,g\}_{\mathrm{P}}+\cdots \tag{50}$$

と展開されることを要請している。すなわち，交換子が Poisson 環の変形であることを意味している[15]。一般には，もちろん，$\star$ 積は非可換積 $f\star g\neq g\star f$ である。そして，この変形された関数代数 $C^\infty(M)[\hbar]$ を量子力学の観測可能量の空間とみなす。($\star$ 積の同値性については，Appendix B を参照のこと。)

それでは，$\star$ 積の一番簡単な例として，**Moyal 積**を紹介する。

[14] 変形量子化の議論では，$\star$ ではなく $*$ を記号として用いることが多い。しかし，著者は $\star$ が好きである。
[15] 物理的には，量子力学の対応原理を意味している。

5-2. Moyal 量子化

Moyal 積とは，

$$
\begin{aligned}
& f(x,p) \star g(x,p) \\
\equiv\ & \exp\left[\frac{i\hbar}{2}\left(\frac{\partial}{\partial q}\frac{\partial}{\partial p'} - \frac{\partial}{\partial p}\frac{\partial}{\partial q'}\right)\right] f(q,p)g(q',p')\Bigg|_{(x',p')=(x,p)} \\
=\ & f(q,p)g(q,p) + i\frac{\hbar}{2}\{f,g\}_{\mathrm{P}} \\
& + \frac{1}{2i}\left(i\frac{\hbar}{2}\right)^2 \{f,g\}^2_{\mathrm{P}} + O(\hbar^3) \qquad (51)
\end{aligned}
$$

で与えられる関数に対する積（掛け算）の変形の一つである[16] [10]。もし $f(q,p)$, $g(q,p)$ が x 及び p の多項式で与えらるならば，$f(q,p) \star g(q,p)$ は有限で切れることはすぐに確認できる。例えば，

$$q \star q = q^2, \qquad (52)$$
$$p \star p = p^2, \qquad (53)$$
$$q \star p = qp + i\frac{\hbar}{2}, \qquad (54)$$
$$p \star q = pq - i\frac{\hbar}{2} \qquad (55)$$

である。そして，いま交換子を

$$
\begin{aligned}
& [f(q,p),\ g(q,p)]_\star \\
& \equiv f(q,p) \star g(q,p) - g(q,p) \star f(q,p) \qquad (56)
\end{aligned}
$$

と定義する。これは **Moyal 括弧**と呼ばれている。そして，Moyal 積 (51) と Moyal 括弧 (56) による量子化を **Moyal 量子化**と呼ぶ。この Moyal 量子化と正準量子化の一番の違いは，正準交換関係を満たす正準変数の一つを微分演算子化する必要はないことである。

(54) と (55) を用いれば，

$$[q,\ p]_\star \ =\ q \star p - p \star q = i\hbar \qquad (57)$$

となり，これは (28) に他ならない。古典近似は，極限 $\hbar \to 0$ をとればよい。（この極限で，Moyal 積 (51) は**通常の**積に，Moyal 括弧 (56) は**通常の**交換関係にそれぞれ戻る。）正準変数を演算子にしていないので，この古典近似（，そしてその逆の操作の量子化）は**直感的に**受け入れることができる（と少なくとも著者は思う）。

時間に依存する Schrödinger 方程式は

$$i\hbar\frac{\partial \Psi(t,q,p)}{\partial t} = H \star \Psi(t,q,p) \qquad (58)$$

で与えられる。ここで ハミルトニアン H は演算子ではなく，関数のままであることに注意する。そして，波動関数 $\phi(q,p)$ に対する固有値問題（$\mathcal{E}$：系のエネルギー）は[17]

$$H \star \phi(q,p) = \mathcal{E}\phi(q,p) \qquad (59)$$

となる[18]。

（例） 一次元調和振動子：

$$
\begin{cases}
z \equiv x + ip, \\
\bar{z} \equiv x - ip
\end{cases} \qquad (60)
$$

という新しい正準変数を導入する。このとき

$$[z,\ \bar{z}]_\star = 2\hbar \qquad (61)$$

となる。すると，一次元調和振動子の Hamiltonian(19) は

$$H \ =\ \frac{1}{2}(p^2 + x^2) = \frac{1}{2}z\bar{z} \qquad (62)$$

と書き直す事ができる[19]。これを Moyal 積で書き直す，

$$
\begin{aligned}
H &= \frac{1}{2}(z \star \bar{z} - \hbar) \\
&= \frac{1}{2}(\bar{z} \star z + \hbar) \\
&= \frac{1}{2}(\bar{z} \star z + z \star \bar{z}) \qquad (63)
\end{aligned}
$$

となる [11, 12, 13]。（三つの内どれを使うかは好みである。関係する公式が Appendix C にある。）そして，波動関数 $\phi(x,p)$ に対する固有値問題（$\mathcal{E}$：系のエネルギー）は

$$H \star \phi(x,p) = \mathcal{E}\phi(x,p) \qquad (64)$$

は虚部 と 実部に分ける。

- 虚部は

$$\left(x\frac{\partial}{\partial p} - p\frac{\partial}{\partial x}\right)\phi(x,p) = 0 \qquad (65)$$

となる。これは回転に対して不変である[20]。よって，新しい変数

$$\eta \equiv 2(x^2 + p^2) \qquad (66)$$

を導入すると，波動関数は $\phi(\eta)$ となる。

---

[16] 関数の独立変数に q 及び p を用いているのは，もちろん，正準変数を意識している。

[17] $\Psi(t,q,p) = \psi(t) \star \phi(q,p)$

[18] 通常の量子力学のオーダーリング問題は，$\hbar^2$ 以上が残っている。

[19] ここでは，簡単のため，$m = k = 1$ とする。

[20] これは位相空間の角運動量と関係することがいえるが，紙数の制限上割愛する。不変量と物理量の関係については，Appendix D を参照のこと。

- 実部は

$$\left(\frac{\eta}{4}-\eta\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}-\frac{\partial}{\partial\eta}-\mathcal{E}\right)\phi(\eta)=0 \tag{67}$$

となる。ここで境界条件として

$$\lim_{\eta\to\infty}\phi(\eta)=0 \tag{68}$$

を仮定し，更に

$$\phi(\eta)\equiv e^{-\eta/2}L(\eta) \tag{69}$$

とすると，方程式 (67) は

$$\left\{\eta\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}+(1-z)\frac{\partial}{\partial\eta}+\mathcal{E}-\frac{1}{2}\right\}L(\eta)=0 \tag{70}$$

となる。これを満たす $L(\eta)$ は

$$L(\eta)=L_n=e^{\eta}\frac{\partial^n}{\partial\eta^n}(e^{-\eta}\eta^n) \tag{71}$$

である。但し，非負整数 $n(=0,1,,2,\cdots)$ には

$$n=\mathcal{E}-\frac{1}{2} \tag{72}$$

という条件が付く。これは調和振動子のエネルギー：

$$\mathcal{E}=\mathcal{E}_n=n+\frac{1}{2} \tag{73}$$

に他ならない。（n を具体的に入れていくと，帰納的に波動関数を求めることは可能である。）

（注意）　正準変数 $z,\bar{z}$ の意味：

$$\begin{cases} a\equiv\dfrac{z}{\sqrt{2}}, \\ a^{\dagger}\equiv\dfrac{\bar{z}}{\sqrt{2}} \end{cases} \tag{74}$$

とすると，

$$[a,\ a^{\dagger}]_{\star}=\hbar \tag{75}$$

となり，正準変数 $z,\bar{z}$ は，実は正準量子化の際の調和振動子の生成・消滅演算子と同じ意味をもっている。

6. 結言

中国科学院での講義では，正準量子化の Heisenberg 表示，経路積分，Nambu 括弧による量子化 [14] 及び一般化された行列による量子化の考察 [15] などについても紹介したが，本小論では紙数の関係上割愛した。これらは，またいずれ機会を見つけて紹介したい。

変形量子化とは，パラメータ $\hbar$ による通常の可換な関数代数の非可換代数への変形と見なすことができる。従って，得られた非可換代数は何らかの非可換空間を記述している[21]。この非可換空間は極限 $\hbar\to 0$ で元の可換空間に帰着するものであるから，非可換空間の全体から見ると可換な（通常の）幾何の極近傍のみを扱うことになる[22]。このように変形量子化を非可換幾何として解釈することにより，十分広いクラスの非可換空間を取り扱うことができるのである。

もともと Moyal 積は，古典力学において位相空間が Euclid 空間の場合の変形量子化で現れたものである。その後，変形量子化は任意の Poisson 多様体に拡張された。その場合には，一般に $\star$ 積と呼ばれる非可換積が得られる。そこで，積を時空上の非可換性と**再解釈**することで，Moyal 積のように単純な非可換空間上のゲージ理論をより一般の非可換なゲージ理論に拡張することができる。著者は共同研究者と，古典的な（つまり通常の可換空間上の）可積分系を，前者の Moyal 積で記述される非可換空間上に拡張する研究を進めている [16, 17, 18]。これらの結果を，より複雑な非可換時空上のゲージ理論を解析するための足がかりとしたいと考えている。

量子力学を最初に習った時に，多くの人は物理量を微分演算子に書き直すことに相当の違和感（もしくは嫌悪感）をもつと思う。しかし，それも使っていくうちにいつしか慣れてしまい，そういうものだと頭の中で片付けてしまうのではないだろうか？しかし，本当はそれではよくない。やはり，学問は最初に持った疑問を，突き詰める必要があると思う。残念ながら，著者が抱き続けている，この演算子化の疑問は未だに完全には解決していない。しかし，本小論では，演算子化を経由しなくても，量子化が可能であることを紹介した。但し，この場合には，積を変更しなくてはならない。物事はいつも一長一短である … としみじみ思う。

謝辞

Moyal 積に関する代数は，肥川 隆夫氏（大妻女子大学・社会情報）及び 浜中 真志氏（名古屋大学・多元数理）との議論を通して習得することができた。両氏に感謝する。

本研究は，科研費（若手 B: 15740242）の補助により

[21] 但し，そのときには，変形量子化とは異なり，$\hbar$ を非可換性のスケールと解釈する。

[22] 物理的にまず興味があるのは，そのような古典的には可換な幾何が成り立つ場合である。

進められたものであることを附記しておく．

Appendix：

Appendix A： N 自由度の解析力学

- **Lagrange 形式**：

Lagrangian $L = L(q_1, \cdots q_N, p_1, \cdots, p_N)$ は，Euler-Lagrange 方程式：

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0$$

を満たしている。また，一般化運動量 p を

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

で定義すると，Euler-Lagrange 方程式は

$$\dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial q_i}$$

と書き直すことができる。

- **Hamilton 形式**：

Hamiltonian $H = H(q_1, \cdots q_N, p_1, \cdots, p_N)$ で，

$$H(q_1, \cdots q_N, p_1, \cdots, p_N) \equiv \sum_{i=1}^{N} p_i \dot{q}_i - L(q, \dot{q})$$

と定義すと，Hamilton の運動方程式：

$$\begin{cases} \dot{q}_i = \dfrac{\partial H}{\partial p_i}, \\ \dot{p}_i = -\dfrac{\partial H}{\partial q_i} \end{cases}$$

が得られる。

- **Poisson 括弧**：

任意関数 $f = f(q_1, \cdots q_N, p_1, \cdots, p_N)$ 及び $g = g(q_1, \cdots q_N, p_1, \cdots, p_N)$ について，Poisson 括弧を

$$\{f,\ g\}_{\mathrm{P}} \equiv \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \cdot \frac{\partial g}{\partial q_i} \right)$$

と定義する[23]。また，基本となる Poisson 括弧は

$$\begin{cases} \{q_i, q_j\}_{\mathrm{P}} = \{p_i, p_j\}_{\mathrm{P}} = 0, \\ \{q_i, p_j\}_{\mathrm{P}} = \delta_{i,j} \end{cases}$$

である。物理量 $\mathcal{F} = \mathcal{F}(q_1, \cdots q_N, p_1, \cdots, p_N)$ の時間変化は，

$$\frac{d\mathcal{F}}{dt} = \{\mathcal{F}, H\}_{\mathrm{P}}$$

と書くことができる。よって，運動方程式は

$$\begin{cases} \dot{q}_i = \{q_i, H\}_{\mathrm{P}}, \\ \dot{p}_i = \{p_i, H\}_{\mathrm{P}} \end{cases}$$

と与えられる。

Appendix B： $\star$ 積の同値性

二つの $\star$ 積 $\star_1$ と $\star_2$ は，結合代数としての同型射

$$(C^\infty(M)[\hbar],\ \star_1)\ \to\ (C^\infty(M)[\hbar],\ \star_2)$$

が存在するとき同値であるという。ここで，T は微分演算子の形式的巾展開：

$$T = T_0 + \hbar T_1 + \cdots$$

で与えられる。

同値な $\star$ 積は見かけは異なるが（代数的な）内容は同じであり，座標変換の $\hbar$ 変形に対応するものである。なお，（複素ではなく）実関数代数を考えるときには，$\star$ 積の代数にもエルミート性の条件が付く。

Appendix C： 公式

Moyal 量子化による調和振動子の $z, \bar{z}$ 表示に関しては，

- $z \star \phi(z, \bar{z}) = \left(z + \hbar \dfrac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) \phi(z, \bar{z})$
- $\bar{z} \star \phi(z, \bar{z}) = \left(\bar{z} - \hbar \dfrac{\partial}{\partial z} \right) \phi(z, \bar{z})$
- $\phi(z, \bar{z}) \star z = \left(z - \hbar \dfrac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) \phi(z, \bar{z})$
- $\phi(z, \bar{z}) \star \bar{z} = \left(\bar{z} + \hbar \dfrac{\partial}{\partial z} \right) \phi(z, \bar{z})$

[23] これも Poisson 括弧が Lie 括弧の一つであることは確かめることができる。

が非常に有用である。

Appendix D： 対称性 と 保存量

保存量とは，

系の物理量の連続的な変換に対して，
物理法則が不変であることの現れ

である。つまり，

系が保存量をもつ ＝ 系に対称性が存在する

といえる。電磁場の位相はラグラジアンに陽に現れない循環座標であり，解析力学の一定理によれば，それに共役な一般化運動量が保存する。この保存量が電荷である。対称性（または循環座標）の出現は，力学系のもつ自由度が見かけよりも小さいことを意味する。量子論では，人間が自由に指定できる循環座標は物理的には意味のない自由度と見なし，意味のある物理量は循環座標に依ってはならないと考える。以下では，場の量子論に出てくる対称性に関して，簡単にまとめる [19, 20]。

ゲージ対称性とは，

（電荷のように）物質の内在的性質
に関する対称性

をいう。素粒子の Standard Model が教えるところによると，系に（局所）ゲージ対称性があると，それに対応する保存量はゲージ粒子と結びつく。ゲージ理論は対称性によるしばりが厳しいことが，ベクトル粒子を含めた繰り込み可能な理論が構築できた。

自発的対称性の破れとは，

理論は対称性を保持するが，量子論
の基底状態が，その対称性を忠実に
実現しない状態

を指す。この考えより，Nambu-Goldstone ボゾンと呼ばれる massless 粒子が出現する。その Nambu-Goldstone ボゾンは，ゲージ粒子の縦波成分として吸収され，そのゲージ粒子は massive となる。これを Higgs 機構という。

量子異常とは，

量子効果で，古典論の対称性が修正
される現象

のことをいう。massless フェルミオンがもつ対称性であるカイラル対称性は量子電磁気学により修正を受ける。このことをカイラル異常項（もしくは Adler-Bell-Jackiw 異常項）といい，量子異常の代表例の一つである。

参考文献

[1] 戸田 晃一 (2003): 人生いろいろ，可積分系もいろいろ，富山県立大学紀要, **第 15 巻**, 10.

[2] 中原 幹夫 (1998): 経路積分とその応用, 東京大学数理科学セミナリーノート 15.

[3] 仲 滋文 (1999): 臨時別冊・数理科学 SGC ライブラリ 3 シュレーディンガー方程式, サイエンス社.

[4] 高橋 康 (2000): 量子力学を学ぶための解析力学入門 増補第 2 版, 講談社.

[5] 亀淵 迪, 表 実 (2003): 朝倉物理学大系 13 量子力学特論, 朝倉書店.

[6] R.P. ファインマン, A.R. ヒッブス (1995): 量子力学と経路積分, みすず書房.

[7] 浅川 嗣彦 (2001): 非可換幾何としての変形量子化と、非可換ゲージ理論, 学位論文，東京大学.

[8] 前田 吉昭，梶浦 宏成，高村 亮 (2002): 変形量子化入門, 東京大学数理科学セミナリーノート 20.

[9] 前田 吉昭，梶浦 宏成 (2003): 弦理論と変形量子化, 数学, **第 55 巻**, 245.

[10] J. E. Moyal (1949): Quantum mechanics as a statistical theory, *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **Vol. 45**, 99.

[11] T. Koikawa(2001): On the vacuum in the Moyal quantization, *Prog. Theor. Phys.* **Vol. 106**, 1027.

[12] T. Koikawa(2001): Role of the imaginary part in the Moyal quantization, *Prog. Theor. Phys.* **Vol. 106**, 1297.

[13] T. Hori and T. Koikawa(2003): Quantization via Star Products, *Prog. Theor. Phys.* **Vol. 110**, 127.

[14] Y. Nambu(1973): Generalized Hamilton dynamics, *Phys. Rev.* **Vol. D7**, 2405.

[15] Y. Kawamura(2002): Generalized Matrix Mechanics, *Prog. Theor. Phys.* **Vol. 107**, 1105.

[16] M. Hamanaka and K. Toda(2003): Towards noncommutative integrable systems, *Phys. Lett. A*, **Vol. 316**, 77.

[17] M. Hamanaka and K. Toda(2003): Noncommutative Burgers equation, *J. Phys. A*, **Vol. 36**, 11981.

[18] M. Hamanaka and K. Toda(2004): Towards Noncommutative Integrable Equations, *Proceedings of Institute of Mathematics of NAS of Ukraine*, **Vol. 50** 44.

[19] 柏 太郎 (2001): 臨時別冊・数理科学 SGC ライブラリ 12 演習 場の量子論, サイエンス社.

[20] 高橋 康, 柏 太郎 (2005): 量子場を学ぶための場の解析力学入門 増補第 2 版, 講談社.

A simple review of Quantization

Kouichi TODA

Department of Liberal Arts and Sciences, Faculty of Engineering

Summary

In this paper the algebra of quantization is reviewed taking the so-called harmonic oscillator as only an example.

Key Words: quantization, star product, harmonic oscillator