# 人生いろいろ，非摂動的解析手法もいろいろ

Luiz A. FERREIRA* ・ 児玉 雄太† ・ 澤渡 信之‡ ・ 戸田 晃一
(工学部 教養教育)

ゲージ場の理論に対する非摂動的解析手法（の一部分）について紹介する.

キーワード: 非線形可積分系，ソリトン，ゲージ理論，非摂動的解析

## 1. はじめに

「時間を効率的に使う」,「時間を有効的に使う」そして「時間を有益に使う」ということは，本質的には異なると思う．少なくとも**研究**を行う場合には，一般的にみて「非効率」な活動ほど，後で振り返ると，実は一番「有益」であったということが非常に多い[1]．我々の共同研究においても大きく進展する時にはいつも側にはお酒がある.

数理物理学の分野で，**非摂動的解析**[2] を行う際にはいつも「**可積分（性）**」という概念が現れる.

「**可積分（性）**」という概念を思い出してほしい [1, 2]．「可積分（性）」とは，有限自由度の Hamilton 力学系に対する概念であった．すなわち，Liouville-Arnold の定理:

| 自由度 $N$ の Hamiltonian 系に $N$ 個の保存量があり, それが Poisson 括弧に関して互いに可換ならば, 初期値問題は有限回の求積[3] によって解ける |
|---|

が成り立つ系, すなわち**初期値問題が求積操作の有限回の繰り返しで解ける**のが**可積分系**である．それではソリトン方程式に代表される非線形な無限自由度の連続系に関してはどうだろうか？ 実はかなり怪しくなる.

非線形な無限自由度の連続系において, 一般には（少なくとも可積分系の研究者の間では）以下の性質（証拠）;

1. **線形化可能**:
   適当な変数変換により線形化できる.

2. **逆散乱法で解ける時**:
   「『適当な境界条件の下で初期値問題を解くこと』が『線形の積分方程式を解くこと』に帰着できる」というのが, 逆散乱法のポイントである.

3. **Lax 対の存在**:
   ほとんどの場合, 逆散乱法の手順にのる.

4. **Liouville-Arnold の意味での「可積分性」**:
   適当な Poisson 構造の下で無限個の互いに可換な保存量が存在する.（または対称性が存在する.）

5. **（反）自己双対 Yang-Mills 方程式からの導出**:
   4 次元の（反）自己双対 Yang-Mills 方程式に対して, 「適当に」ゲージ群を固定し, 場の量や空間次元に「適当な」制約を加えることで, 可積分な方程式を導出できることが知られている．そして, おそらく全ての可積分方程式が導出できるであろうと信じられている（**Ward 予想**）.

6. **bi-Hamilton 構造**:
   異なる Poisson 構造をもつ二通りの Hamilton 系として定式化できる．これから Liouville-Arnold の意味での「可積分性」に従うことが言える.

*Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo
†東京理科大学理工学部物理学科
‡東京理科大学理工学部物理学科

[1] **人生**も同じではないだろうか.
[2] 非摂動的解析とは，数値計算などではなく厳密に計算することだと思ってほしい.

**7. 厳密解の存在**:

広田の直接法などにより（$N$-ソリトン解のような）広いクラスの厳密解の表式を具体的に求めることができる．

**8. Bäcklund 変換の存在**:

これがあれば大体簡単な解から逐次的にソリトン解（やそれに類する解）が構成できる．

**9. Painlevé 性**:

常微分方程式の級数解のもつ「初期値に伴って動く特異点は高々極のみ」という性質のことである．

のどれかが成り立てば「可積分」と考えられている．

本稿でとりあげる非摂動的解析手法で求められる物理量は,「保存量」である[4]．まず，本稿でとりあげる手法の基本的なアイデアを，一次元の力学系を例にとり，説明する．

$q = q(t)$, $K = K(q)$ とし，1 次元空間上の粒子を考える．

$$[\mathcal{T}_i, \mathcal{T}_j] = i\epsilon_{ijk}\mathcal{T}_k \tag{1}$$

とする．ここで，$\epsilon_{ijk} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ i & j & k \end{pmatrix}$ である．このとき，

$$\begin{cases} \mathcal{A} = \dot{q}\mathcal{T}_3 \ + \ K\mathcal{T}_1, \\ \mathcal{B} = i\dot{K}\mathcal{T}_2 \end{cases} \tag{2}$$

とおくと，

> 次の行列値微分方程式：
>
> $$\frac{\mathrm{d}\mathcal{A}}{\mathrm{d}t} = [\mathcal{B}, \mathcal{A}] \tag{3}$$
>
> が，運動方程式と等価であることを示せ．

但し，$\dot{q} = \dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$ および $K' = \dfrac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}q}$ とする．

**（証 明）**

$$\begin{aligned} 0 &= \dot{A} - [\mathcal{B}, \mathcal{A}] \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\dot{q}\mathcal{T}_3 + K\mathcal{T}_1) - \Big[i\dot{K}\mathcal{T}_2,\ \dot{q}\mathcal{T}_3 + K\mathcal{T}_1\Big] \\ &= \Big(\ddot{q}\mathcal{T}_3 \ + \ \dot{K}\mathcal{T}_1\Big) \\ &\quad + i\dot{q}\dot{K}\,[\mathcal{T}_3, \mathcal{T}_2] + iK\dot{K}\,[\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2] \\ &= \left(\ddot{q} \ - \ \frac{1}{2}\left(K^2\right)'\right)\mathcal{T}_3 \end{aligned} \tag{4}$$

[4] 厳密解を求めることも可能であるが，本稿では取り扱わない．

より，次の方程式：

$$\ddot{q} = +\frac{1}{2}\left(K^2\right)' \tag{5}$$

をえる．この場合，

$$V(q) = -\frac{1}{2}K^2 \tag{6}$$

とすると，方程式 (5) は

$$\ddot{q} = -V'(q) \tag{7}$$

となり，これは正しく運動方程式である．

一般に，$\mathcal{A} = \mathcal{A}(t)$, $\mathcal{B} = \mathcal{B}(t) \in \mathrm{GL}(n)$ が， 次の行列値微分方程式：

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\mathcal{A}}{\mathrm{d}t} = [\mathcal{B}, \mathcal{A}]} \tag{8}$$

を満たすとき，

> 次の定理：
>
> $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{Tr}\mathcal{A}^{\mathrm{k}} = 0, \quad \mathrm{k} \in \mathbb{N} \tag{9}$$
>
> が成り立つことを示せ．

つまり，$\mathrm{Tr}\mathcal{A}^{\mathrm{k}}$ は独立変数 $t$ に依らない．（**保存量**となっている．）

**（証 明）**

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{Tr}\mathcal{A}^{\mathrm{k}} &= \sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathcal{A}^k\right)_{ii}\right\} \\ &= \sum_{i=1}^{n}\left\{\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{A}^k\right)_{ii}\right\} \\ &= k\mathrm{Tr}\left\{\left(\frac{\mathrm{d}\mathcal{A}}{\mathrm{d}t}\right)\mathcal{A}^{\mathrm{k}-1}\right\} \\ &= k\mathrm{Tr}\left\{\left(\mathcal{B}\mathcal{A} - \mathcal{A}\mathcal{B}\right)\mathcal{A}^{\mathrm{k}-1}\right\} \\ &= k\mathrm{Tr}\left(\mathcal{B}\mathcal{A}^{\mathrm{k}} - \mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{A}^{\mathrm{k}-1}\right) \\ &= k\left(\mathrm{Tr}\mathcal{B}\mathcal{A}^{\mathrm{k}} - \mathrm{Tr}\mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{A}^{\mathrm{k}-1}\right) \\ &= k\left(\mathrm{Tr}\mathcal{B}\mathcal{A}^{\mathrm{k}} - \mathrm{Tr}\mathcal{B}\mathcal{A}^{\mathrm{k}}\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

さらに，$g = g(t) \in \mathrm{GL}(n)$ とすると，

ゲージ変換：

$$\begin{cases} \mathcal{A}^g = g\mathcal{A}g^{-1}, \\ \mathcal{B}^g = g\mathcal{B}g^{-1} - \dot{g}g^{-1} \end{cases}$$

に対して，方程式 (8) は不変，つまり

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{A}^g}{\mathrm{d}t} = [\mathcal{B}^g, \mathcal{A}^g]$$

を満たす.

**（証 明）**
各自で確かめてほしい.

これら通常の力学系のアイデアをゲージ場の理論へ拡張する．そのときに，**非可換ストークスの定理**[3, 4] なるものが重要な役割をはたす．次節でこの定理を紹介する．

**(記号)**　簡単のため, 本稿中の演算子記号として，

$$f_x(x) \equiv \partial_x f(x) \equiv \frac{\partial f}{\partial x}(x),$$

$$[\mathcal{A},\ \mathcal{B}] \equiv \mathcal{A}\mathcal{B} - \mathcal{B}\mathcal{A}$$

と約束しておく．このとき，明らかに

$$\partial_x \partial_x^{-1} f(x) = \partial_x^{-1} \partial_x f(x) = 1,$$

$$[\mathcal{A},\ \mathcal{A}] = 0$$

である.

## 2. 非可換ストークスの定理

通常のベクトル解析 及び 電磁気学において，**ストークスの定理**（Stokes's theorem）：

$$\int_\Gamma \vec{A} \cdot d\vec{\ell} = \int_\Sigma \vec{\nabla} \times \vec{A} \cdot d\vec{\Sigma} \qquad (10)$$

は，2 次元曲面 $\Sigma$ と その 1 次元境界 $\Gamma$ 上の積分の等価性を示す．いま (10) 式の $\vec{A}$ をゲージ場のベクトルポテンシャルだと解釈した場合，右辺の被積分関数は

$$(\vec{\nabla} \times \vec{A})_i = \epsilon_{ijk} \partial_j A_k$$

$$\rightarrow \begin{cases} (\vec{\nabla} \times \vec{A})_1 = \partial_2 A_3 - \partial_3 A_2 = f_{23} \\ (\vec{\nabla} \times \vec{A})_2 = \partial_3 A_1 - \partial_1 A_3 = f_{31} \\ (\vec{\nabla} \times \vec{A})_3 = \partial_1 A_2 - \partial_2 A_1 = f_{12} \end{cases}$$

であり，可換ゲージポテンシャルの場の強さ $f_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ になっている．実際のところ，電磁気学は可換な U(1) ゲージ理論だといえるので納得がいく．

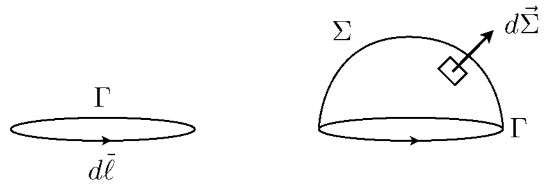


図 1: ストークスの定理の模式図．右図は 2 次元曲面 $\Sigma$ と 微小面素 $d\vec{\Sigma}$ であり，左図はその 1 次元境界 $\Gamma$ と微小線素 $d\vec{\ell}$ である．

リー群 $G$ のリー代数 $\hat{g}$ に値を持つベクトルポテンシャルを $A_\mu = A_\mu^a T_a$ とし，非可換ゲージ理論に対するストークス定理を考える．例えば，リー代数 $G = \mathrm{SU}(2)$ の場合，$T_a$ は

$$T_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad T_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

と取ることができる.

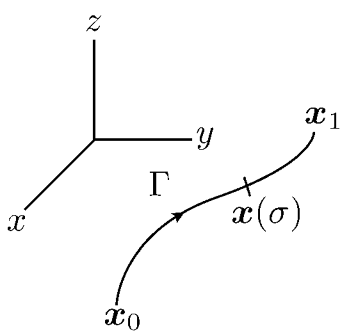


図 2: 積分経路 $\Gamma$．パラメータ $\sigma$ によって媒介変数表示できる．

まず，$W$ を経路順序積分（path ordered integral）：

$$W = \mathcal{P}_{\text{path}} \exp\left( - \int_\Gamma dx^\mu A_\mu \right) \qquad (11)$$

によって定義される量とし，積分経路 $\Gamma$ は $\sigma \in [0, 2\pi]$ で媒介変数表示されているとする．このとき，

$W$ は初期条件 $W(\sigma = 0) = I$ を伴う微分方程式：

$$\frac{dW}{d\sigma} + A_\mu \frac{dx^\mu}{d\sigma} W = 0 \qquad (12)$$

に従うことを示せ．

（証 明）

この微分方程式は定義 (11) より導出可能である．

$$\begin{aligned} & W \\ &= \mathcal{P}_{\text{path}} \exp\left(-\int_\Gamma dx^\mu A_\mu\right) \\ &= \mathcal{P}_{\text{path}} \exp\left(-\int_0^\sigma d\sigma' A_\mu(\sigma') \frac{dx^\mu}{d\sigma'}\right) \\ &= 1 - \int_0^\sigma d\sigma' A_\mu(\sigma') \frac{dx^\mu}{d\sigma'} \\ &+ \int_0^\sigma d\sigma' A_\mu(\sigma') \frac{dx^\mu}{d\sigma'} \int_0^{\sigma'} d\sigma'' A_\nu(\sigma'') \frac{dx^\nu}{d\sigma''} \\ &- \cdots \end{aligned}$$

そして，この（簡単のため係数因子は省いた）$W$ を $\sigma$ で微分すると，

$$\begin{aligned} & \frac{dW}{d\sigma} \\ &= 0 - A_\mu(\sigma) \frac{dx^\mu}{d\sigma} \\ &\quad + A_\mu(\sigma) \frac{dx^\mu}{d\sigma} \int_0^\sigma d\sigma'' A_\nu(\sigma'') \frac{dx^\nu}{d\sigma''} + \cdots \\ &= -A_\mu \frac{dx^\mu}{d\sigma} \\ &\quad \times \left(1 - \int_0^\sigma d\sigma'' A_\nu(\sigma'') \frac{dx^\nu}{d\sigma''} + \cdots\right) \\ &= -A_\mu \frac{dx^\mu}{d\sigma} W \end{aligned}$$

となり，微分方程式 (12) をえる．

（参 考）

$WW^{-1} = I$ を満たす $W^{-1}$ を考えると，


図 3: $W$ と $W^{-1}$ の関係を示す．

$$\frac{d(WW^{-1})}{d\sigma} = 0$$

より，$W^{-1}$ が次の微分方程式：

$$\frac{dW^{-1}}{d\sigma} - W^{-1} A_\mu \frac{dx^\mu}{d\sigma} = 0 \qquad (13)$$

を満たすこともわかる．（各自で確かめてほしい．）

次に，積分経路 $\Gamma$ を $\Gamma + \delta\Gamma$ としたときの変分 $\delta W$ について考える．このとき，

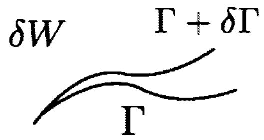


図 4: 積分経路 $\Gamma$ と $\Gamma + \delta\Gamma$ を示す．

次の関係式：

$$\frac{d(W^{-1}\delta W)}{d\sigma} = -W^{-1}\delta\left(A_\mu \frac{dx^\mu}{d\sigma}\right) W \qquad (14)$$

を示せ．

（証 明）

まず，

$$\begin{aligned} & \frac{dW}{d\sigma} + A_\mu \frac{dx^\mu}{d\sigma} W = 0 \\ \Rightarrow\ & \frac{d(\delta W)}{d\sigma} + \delta\left(A_\mu \frac{dx^\mu}{d\sigma}\right) W + A_\mu \frac{dx^\mu}{d\sigma} \delta W = 0 \end{aligned}$$

を準備して，左から $W^{-1}$ を掛けると

$$\begin{aligned} 0 &= W^{-1} \frac{d(\delta W)}{d\sigma} + W^{-1}\delta\left(A_\mu \frac{dx^\mu}{d\sigma}\right) W \\ & \quad + W^{-1} A_\mu \frac{dx^\mu}{d\sigma} \delta W \\ &= W^{-1} \frac{d(\delta W)}{d\sigma} + W^{-1}\delta\left(A_\mu \frac{dx^\mu}{d\sigma}\right) W \\ & \quad + \frac{dW^{-1}}{d\sigma} \delta W \\ &= \frac{d(W^{-1}\delta W)}{d\sigma} + W^{-1}\delta\left(A_\mu \frac{dx^\mu}{d\sigma}\right) W \end{aligned}$$

をえる．

そして，$F_{\lambda\mu} := \partial_\lambda A_\mu - \partial_\mu A_\lambda + [A_\lambda, A_\mu]$ と定義したとき，

次の関係式：

$$W^{-1}\delta W = -W^{-1}A_\mu \delta x^\mu W \Big|_0^\sigma - \int_0^\sigma d\sigma' W^{-1} F_{\lambda\mu} W \delta x^\lambda \frac{dx^\mu}{d\sigma'} \quad (15)$$

であることを示せ.

（証 明）

関係式 (14) の両辺を $\sigma$ で積分すると，

$$\begin{aligned} & W^{-1}\delta W \\ = & -\int_0^\sigma d\sigma' W^{-1}\delta\left(A_\mu \frac{dx^\mu}{d\sigma'}\right) W \\ = & -\int_0^\sigma d\sigma' W^{-1} \\ & \times \left[(\delta A_\mu)\frac{dx^\mu}{d\sigma'} + A_\mu \frac{d(\delta x^\mu)}{d\sigma'}\right] W \\ = & -\int_0^\sigma d\sigma' W^{-1} \\ & \times \left[\partial_\lambda A_\mu \delta x^\lambda \frac{dx^\mu}{d\sigma'} + A_\mu \frac{d(\delta x^\mu)}{d\sigma'}\right] W \end{aligned}$$

となる．$\delta A_\mu = \partial_\lambda A_\mu \delta x^\lambda$ を用いて， 整理するために全微分：

$$\frac{d}{d\sigma'}\left(W^{-1}A_\mu \delta x^\mu W\right) - \frac{d}{d\sigma'}\left(W^{-1}A_\mu \delta x^\mu W\right) = 0$$

を加えると，

$$\begin{aligned} & W^{-1}\delta W \\ = & -\int_0^\sigma d\sigma' \Big[W^{-1}\partial_\lambda A_\mu \delta x^\lambda \frac{dx^\mu}{d\sigma'} W \\ & + \frac{d}{d\sigma'}\left(W^{-1}A_\mu \delta x^\mu W\right) \\ & - \frac{d}{d\sigma'}\left(W^{-1}A_\mu \delta x^\mu W\right) \\ & + W^{-1}A_\mu \frac{d(\delta x^\mu)}{d\sigma'} W\Big] \\ = & -\int_0^\sigma d\sigma' \Big[W^{-1}\partial_\lambda A_\mu \delta x^\lambda \frac{dx^\mu}{d\sigma'} W \\ & + \frac{d}{d\sigma'}\left(W^{-1}A_\mu \delta x^\mu W\right) \\ & - \frac{dW^{-1}}{d\sigma'} A_\mu \delta x^\mu W \\ & - W^{-1}\frac{dA_\mu}{d\sigma'}\delta x^\mu W \\ & - W^{-1}A_\mu \frac{d(\delta x^\mu)}{d\sigma'} W \\ & - W^{-1}A_\mu \delta x^\mu \frac{dW}{d\sigma'} \\ & + W^{-1}A_\mu \frac{d(\delta x^\mu)}{d\sigma'} W\Big] \end{aligned}$$

ここで，微分方程式 (12) と (13) 式 及び

$$\frac{dA_\mu}{d\sigma'} = \partial_\lambda A_\mu \frac{dx^\lambda}{d\sigma'}$$

を用いて，さらに各項の添字を調節すると，

$$\begin{aligned} & W^{-1}\delta W \\ = & -W^{-1}A_\mu \delta x^\mu W \Big|_0^\sigma \\ & -\int_0^\sigma d\sigma' W^{-1} \\ & \times \left[\partial_\lambda A_\mu - \partial_\mu A_\lambda + A_\lambda A_\mu - A_\mu A_\lambda\right] \\ & \times W \delta x^\lambda \frac{dx^\mu}{d\sigma'} \\ = & -\int_0^\sigma d\sigma' W^{-1} F_{\lambda\mu} W \delta x^\lambda \frac{dx^\mu}{d\sigma'} \end{aligned}$$

（参 考）

もし，積分経路の端点を $\delta x^\mu(\sigma=0) = \delta x^\mu(\sigma=2\pi) = 0$ と固定すると，

$$\begin{aligned} & W^{-1}(2\pi)\delta W(2\pi) \\ & = -\int_0^{2\pi} d\sigma W^{-1} F_{\lambda\mu} W \delta x^\lambda \frac{dx^\mu}{d\sigma} \quad (16) \end{aligned}$$

である．すなわち，$F_{\lambda\mu} = 0$（**零曲率条件**）を満たすゲージポテンシャルに対しては $\delta W = 0$ となることが分かる.

以下では，$\Gamma$ が閉曲線，すなわち積分経路 $\Gamma$ の端点が同一点 $\boldsymbol{x}_0 := x^\mu(\sigma=0) = x^\mu(\sigma=2\pi)$ である場合を考える．さらに，$\Sigma$ を $\Gamma$ を境界として持つ 2 次元曲面だとする．この曲面 $\Sigma$ は固定点 $\boldsymbol{x}_0$ を始終点とするループで走査することが可能で，このようなループは $\tau \in [0, 2\pi]$ によって媒介変数表示することができる．また，$\tau = 2\pi$ のループは $\Sigma$ の境界 $\Gamma$ に一致する.

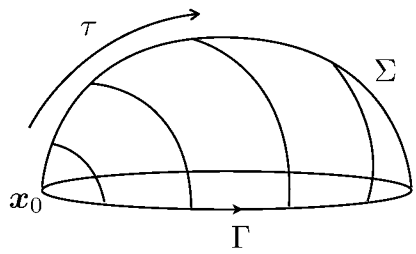


図 5: ループによる曲面 $\Sigma$ の走査.

このとき，$\delta W = W(\Gamma + \delta\Gamma) - W(\Gamma)$ が $\tau$ で媒介変数表示でき，さらに $\delta x^\lambda = \dfrac{dx^\lambda}{d\tau} d\tau$ である．故に，

(16) 式は

$$\frac{dW}{d\tau} = -W\int_0^{2\pi} d\sigma W^{-1}F_{\lambda\mu}W\frac{dx^\lambda}{d\tau}\frac{dx^\mu}{d\sigma} \qquad (17)$$

となる．$W(\tau=0)=I$ と仮定すると，(17) 式を積分することで

$$\begin{aligned} W &= \mathcal{P}_{\rm surface} & (18)\\ &\quad \times \exp\left[-\int_\Sigma W^{-1}F_{\lambda\mu}W\frac{dx^\lambda}{d\tau}\frac{dx^\mu}{d\sigma}\,d\sigma\,d\tau\right] \end{aligned}$$

を得る．ここで $\mathcal{P}_{\rm surface}$ は表面順序積分（surface ordered integral）を意味する．よって，$W$ の 2 つの表式 (11) と (18) より

$$\boxed{\begin{aligned} &\mathcal{P}_{\rm path}\exp\left[-\int_\Gamma A_\mu\frac{dx^\mu}{d\sigma}\,d\sigma\right] \qquad (19)\\ &= \mathcal{P}_{\rm surface}\exp\left[-\int_\Sigma W^{-1}F_{\lambda\mu}W\frac{dx^\lambda}{d\tau}\frac{dx^\mu}{d\sigma}\,d\sigma\,d\tau\right] \end{aligned}}$$

をえる．(10) 式の類似構成物として，**非可換ストークスの定理**（non-Abelian Stokes theorem）と呼ばれる．

## 3. $(1+1)$ 次元時空上の場の理論 と保存則

前節の (16) 式より $\hat{g}$ 値ゲージポテンシャル $A_\mu$ が零曲率条件 $F_{\mu\nu}=0$ を満たすとき，$\delta W=0$ であることより，$W$ が積分経路に依存しない保存量であることが分かる．すなわち，この事実はある種の保存則を与えているといえる．

まず，積分経路を分割したときの $W$ の振る舞いをみておく．ここでは積分経路 $\Gamma$ を

$$\Gamma[\boldsymbol{x}_i \to \boldsymbol{x}_f] = \Gamma_1[\boldsymbol{x}_i \to \boldsymbol{x}_1] + \Gamma_2[\boldsymbol{x}_1 \to \boldsymbol{x}_f]$$

のように分割することを考える．このとき，

> $W(\boldsymbol{x}_i)=I$ とするとき，
>
> $$W(\Gamma) = W(\Gamma_2)W(\Gamma_1) \qquad (20)$$
>
> を示せ．

**（証 明）**

$$\begin{aligned} &W(\Gamma)\\ &= \mathcal{P}_{\rm path}\exp\left[-\int_{\Gamma=\Gamma_1+\Gamma_2} A_\mu\frac{dx^\mu}{d\sigma}\,d\sigma\right]\\ &= \mathcal{P}_{\rm path}\exp\left[-\int_{\Gamma_1} A_\mu\frac{dx^\mu}{d\sigma}\,d\sigma\right.\\ &\qquad\qquad \left.-\int_{\Gamma_2} A_\mu\frac{dx^\mu}{d\sigma}\,d\sigma\right]\\ &= \mathcal{P}_{\rm path}\exp\left[-\int_{\Gamma_1} A_\mu\frac{dx^\mu}{d\sigma}\,d\sigma\right]\\ &\quad \times\exp\left[-\int_{\Gamma_2} A_\mu\frac{dx^\mu}{d\sigma}\,d\sigma\right]\\ &= W(\Gamma_2)W(\Gamma_1) \end{aligned}$$

であり，この順序は微分方程式 (12) によって決まるものである．

簡単な具体例をみてみよう．座標系 $(x^0,x^1)=(t,x)$ とする．零曲率条件 $F_{\mu\nu}=0$ を満たすゲージポテンシャル $A_\mu$ を考える場合，

> $$\mathrm{Tr}\left[W^N(\Gamma_t)\right] = \mathrm{Tr}\left[W^N(\Gamma_0)\right] \qquad (21)$$
>
> を示せ．これにより，$\mathrm{Tr}[W^N(\Gamma_0)]$ が時間 $t$ に関する保存量である．

**（証 明）**
$\delta W=0$ より，$W$ は積分経路に依らず不変である．故に，

$$W(\Gamma_L)W(\Gamma_0) = W(\Gamma_t)W(\Gamma_{-L}) \qquad (22)$$

となる．ここで媒介変数を $\sigma=t$ と選ぶ．このとき，(12) 式は

$$\frac{dW}{dt} + A_tW = 0 \qquad (23)$$

となり，すなわち

$$W(\Gamma_{\pm L}) = \exp\left[-\int A_t|_{x=\pm L}\,dt\right] \qquad (24)$$

を意味する．(24) において $A_t(t,x=L)=A_t(t,x=-L)$ であることを仮定すると，(22) 式は

$$W(\Gamma_L)W(\Gamma_0)W^{-1}(\Gamma_L) = W(\Gamma_t) \qquad (25)$$

となり，その両辺の 2 乗は

$$\begin{aligned} W^2(\Gamma_t) &= \left[W(\Gamma_L)W(\Gamma_0)W^{-1}(\Gamma_L)\right]^2\\ &= W(\Gamma_L)W^2(\Gamma_0)W^{-1}(\Gamma_L) \quad (26) \end{aligned}$$

である．同様の計算により，

$$W^N(\Gamma_t) = W(\Gamma_L)W^N(\Gamma_0)W^{-1}(\Gamma_L)$$

をえることができ, その辺々のトレースをとればよい.

**（参 考）**
ここでは，一般的なゲージ変換：

$$\begin{cases} A_\mu \quad \rightarrow \quad A'_\mu = gA_\mu g^{-1} - \partial_\mu g\, g^{-1} \\ F_{\mu\nu} \quad \rightarrow \quad F'_{\mu\nu} = gF_{\mu\nu}g^{-1} \end{cases} \tag{27}$$

を考える．まず零曲率条件 $F_{\mu\nu} = 0$ の下では，ゲージ変換後も変わらず $F'_{\mu\nu} = 0$ であることはすぐに理解できる．しかしながら，以下で示すように $W(\Gamma)$ はゲージ不変量ではない．微分方程式 (12) をゲージ変換すると

$$\begin{aligned} & \frac{dW}{d\sigma} + A_\mu \frac{dx^\mu}{d\sigma} W = 0 \\ \Rightarrow\ & \frac{dW'}{d\sigma} + A'_\mu \frac{dx^\mu}{d\sigma} W' = 0 \\ \Rightarrow\ & \frac{dW'}{d\sigma} + gA_\mu g^{-1} \frac{dx^\mu}{d\sigma} W' - \partial_\mu g\, g^{-1} \frac{dx^\mu}{d\sigma} W' \\ & = 0 \\ \Rightarrow\ & g^{-1}\frac{dW'}{d\sigma} + A_\mu g^{-1} \frac{dx^\mu}{d\sigma} W' + \partial_\mu g^{-1} \frac{dx^\mu}{d\sigma} W' \\ & = 0 \\ \Rightarrow\ & g^{-1}\frac{dW'}{d\sigma} + A_\mu g^{-1} \frac{dx^\mu}{d\sigma} W' + \frac{dg^{-1}}{dx^\mu} \frac{dx^\mu}{d\sigma} W' \\ & = 0 \\ \Rightarrow\ & g^{-1}\frac{dW'}{d\sigma} + A_\mu g^{-1} \frac{dx^\mu}{d\sigma} W' + \frac{dg^{-1}}{d\sigma} W' = 0 \\ \Rightarrow\ & \frac{d(g^{-1}W')}{d\sigma} + A_\mu \frac{dx^\mu}{d\sigma}(g^{-1}W') = 0 \end{aligned}$$

であり，$g^{-1}W'$ が新たな $W$ として振る舞うことが分かる．さらに，別のゲージ変換：

$$g^{-1}W' = Wh \tag{28}$$

を定義すると，

$$W' = gWh \tag{29}$$

となり, $W$ の経路順序付けにより

$$W \rightarrow W' = g(\boldsymbol{x}_1)Wg^{-1}(\boldsymbol{x}_0) \tag{30}$$

とすることができる．故に，$\mathrm{Tr}[W'] = \mathrm{Tr}[W]$ であり保存則としてはゲージ不変であることを示すことができる．

# 4．(2 + 1) 次元時空の場の理論 と 保存則

前節で議論した $(1+1)$ 次元時空の場合，空間積分は 1 次元積分（すなわち 線積分）であり，その積分経路は 1 つの媒介変数により表すことができた．一方，$(2+1)$ 次元時空における空間積分は 2 次元積分（すなわち 面積分）である．そこで以下の 4 つ点に関して考えなくてはならない：

1. 順序付け（ordering）
2. 媒介変数表示： 2 つの媒介変数が必要：
   - ループ上の位置：$\sigma = \{\sigma = 0 \rightarrow \boldsymbol{x}_0,\quad \sigma = 2\pi \rightarrow \boldsymbol{x}_0\}$
   - ループの区別（loop name）：$\tau = \{\tau = 0 \rightarrow \boldsymbol{x}_0,\quad \tau = 2\pi \rightarrow \Gamma\}$
3. 方程式： 媒介変数に対応する 2 つの方程式[5]
   - $\sigma$：(1+1) 次元の議論より微分方程式 (12) を用いることにする．
   - $\tau$：$\sigma$ の類似物として
   $$\frac{dV}{d\tau} - VT = 0 \tag{31}$$
   ここで
   $$T(B, A, \tau) = \int_0^{2\pi} d\sigma W^{-1} B_{\mu\nu} W \frac{dx^\mu}{d\sigma}\frac{dx^\nu}{d\tau}$$
4. 空間の掃き方（scanning）： 任意性があり一意には決まらない．これは $B_{\mu\nu}$ は局所変数であるのに対し，$W$ は非局所変数であることが原因であり，事実 $W = W(\sigma)$ であることから $W$ はループ上の位置にのみ依存している．しかし，各ループ（つまり特定の $\tau$）に対する零曲率条件：
   $$\begin{cases} F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu] = 0, \\ A_\mu = -\partial_\mu W\, W^{-1} \end{cases} \tag{32}$$
   が $W$ を局所的に定めるために問題は解決可能する．

ここでも積分経路の微小変化に対し，(31) 式の $V(\tau)$ が不変であることを要請しよう．まず条件 $VV^{-1} = 1$ より，

$$\frac{d(VV^{-1})}{d\tau} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{dV^{-1}}{d\tau} + TV^{-1} = 0$$

[5] ordering についてはこの方程式の符号で決まる．この定義により $V_1V_2\ldots$ となる．ちなみに $\ldots W_2W_1$ の逆順.

をえる．(1 + 1) 次元の場合と同様の計算により，

$$\begin{aligned}&\delta V(\tau)V^{-1}(\tau)\\ =\;& V(\tau)\left[\int_0^{2\pi} d\sigma W^{-1}B_{\mu\nu}W\frac{dx^\mu}{d\sigma}\delta x^\nu\right]V^{-1}(\tau)\\ &+\int_0^\tau d\tau' V(\tau')\\ &\times\Bigg\{\int_0^{2\pi} d\sigma W^{-1}(D\wedge B)W\frac{dx^\mu}{d\sigma}\frac{dx^\nu}{d\tau'}\delta x^\lambda\\ &-\left[T(B,A,\tau'),\int_0^{2\pi} d\sigma\, W^{-1}B_{\mu\nu}W\frac{dx^\mu}{d\sigma}\delta x^\nu\right]\\ &\Bigg\}V^{-1}(\tau') \end{aligned}\tag{33}$$

をえる．(33) 式において，

$$D\wedge B = D_\lambda B_{\mu\nu} + D_\mu B_{\nu\lambda} + D_\nu B_{\lambda\mu}$$

を用いた．(33) 式の第 1 項は変分条件： $\delta x = 0|_\Gamma$（境界は変化させない）より 0 である．故に，変分条件を満たす任意の積分経路の微小変化について $\delta V(\tau)V^{-1}(\tau) = 0$ を要請すると，(33) 式の 第 2 項が 0，すなわち

$$\begin{aligned}&\int_0^\tau d\tau' V(\tau')\\ &\times\Bigg\{\int_0^{2\pi} d\sigma W^{-1}(D\wedge B)W\frac{dx^\mu}{d\sigma}\frac{dx^\nu}{d\tau'}\delta x^\lambda\\ &-\left[T(B,A,\tau'),\int_0^{2\pi} d\sigma\, W^{-1}B_{\mu\nu}W\frac{dx^\mu}{d\sigma}\delta x^\nu\right]\\ &\Bigg\}V^{-1}(\tau') = 0 \end{aligned}\tag{34}$$

が，(2 + 1) 次元における零曲率条件となる．

処方箋の整理はここまでとして，具体的に保存則を求めよう．

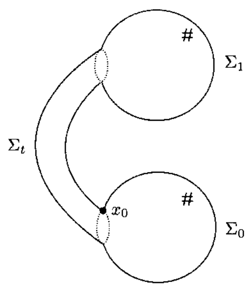


図 6: 多様体 $\mathcal{M} = S^2 \times \mathbb{R}$ の模式図.

多様体 $\mathcal{M} = S^2 \times \mathbb{R}$ を考える．ここで $\mathbb{R}$ は $x^0$（時間成分）の多様体である．さらに $\Sigma_0 := S^2|_{x^0=0}$，$\Sigma_1 := S^2|_{x^0=t}$ と定義し，この 2 つの多様体を $\Sigma_t$ でつなぐことにする．$\tilde{\Sigma}_0 := \Sigma_1 \cup \Sigma_t$ とすると，微分方程式：

$$\frac{dV}{d\tau} - VT = 0 \tag{35}$$

より，$\Sigma_0$ でのループの基点を $\boldsymbol{x}_0$，$\Sigma_1$ でのループの基点を $\boldsymbol{x}_1$ とすると，

$$V(\tilde{\Sigma}_0) = V(\tilde{\Sigma}_0;\boldsymbol{x}_0) = V(\Sigma_t;\boldsymbol{x}_0)V(\Sigma_1;\boldsymbol{x}_1) \tag{36}$$

となる．このとき，

$$\mathrm{Tr}[V^N(\Sigma_0;\boldsymbol{x}_0)] = \mathrm{Tr}[V^N(\Sigma_1;\boldsymbol{x}_1)] \tag{37}$$

が保存量となることを示せ.

**（証 明）**

$$T = T_{\boldsymbol{x}_0\to\boldsymbol{x}_1} + T_{\mathrm{loop};\boldsymbol{x}_1} + T_{\boldsymbol{x}_1\to\boldsymbol{x}_0} = T_{\mathrm{loop};\boldsymbol{x}_1} \tag{38}$$

となることに注意すると，

$$\begin{aligned}&V(\Sigma_1;\boldsymbol{x}_1)\\ &= W(\boldsymbol{x}_1;\boldsymbol{x}_0)V(\Sigma_1;\boldsymbol{x}_1)W^{-1}(\boldsymbol{x}_1;\boldsymbol{x}_0)\end{aligned}\tag{39}$$

であり，$\mathrm{Size}(\Sigma_t) \to 0$ すなわち $\Sigma_t \to \mathbb{R}$ とすると，(39) 式より

$$\begin{aligned}&V(\Sigma_0)\\ =\;& V(\tilde{\Sigma}_0) = V(\Sigma_t)V(\Sigma_1)\\ =\;& V(\Sigma_t;\boldsymbol{x}_0)W(\boldsymbol{x}_1;\boldsymbol{x}_0)V(\Sigma_1;\boldsymbol{x}_1)W^{-1}(\boldsymbol{x}_1;\boldsymbol{x}_0)\\ \to\;& W(\boldsymbol{x}_1;\boldsymbol{x}_0)V(\Sigma_1;\boldsymbol{x}_1)W^{-1}(\boldsymbol{x}_1;\boldsymbol{x}_0)\end{aligned}\tag{40}$$

をえる．よって，

$$V(\Sigma_0;\boldsymbol{x}_0) = W(\boldsymbol{x}_1;\boldsymbol{x}_0)V(\Sigma_1;\boldsymbol{x}_1)W^{-1}(\boldsymbol{x}_1;\boldsymbol{x}_0)$$

となり，あとは (1 + 1) 次元の場合と同様にトレースをとればよい.

## 5. まとめ

ここからがやっと本題というところで紙数制限に達してしまった．具体的な模型に対する考察 や より高次元時空上での取り扱いなどは、現在準備中の論文を参照してほしい．より高次元時空を取り扱う場合には、ループ空間を用いることが有効であり、厳密解を具体的に構成することも可能である.

## 謝辞

本研究は，ブラジル科学アカデミー・日本学術振興会「平成19年度特定国派遣事業」，東京理科大学「客員教員招へいプログラム」，富山県立大学「教養教育特別研究経費」・「新教育プログラム開発・試行・実施支援」及び 部分的に京都大学 グローバルCOE「普遍性と創発性から紡ぐ次世代物理学」の資金援助を受けて行われていることを附記する.

著者の一人（KT）は以下の三氏：
森山 信彦氏（フルハルター）， 吉宗 史博氏（Pen and message.）そして 和田 哲哉氏（信頼文具舗）
に，いつも使い易い文具を提供してくれていることを感謝する.

最後に，研究のためとはいえ，頻繁に自宅を留守にすることをいつも寛容に認めてくれる（互いの）家族に感謝する.


## 参考文献


[1] 戸田 晃一（2002）：
Painlevé 性–可積分判定法という観点から–, 慶應義塾大学 日吉紀要 自然科学, **第32巻**, pp.1-37.

[2] 戸田 晃一 (2003):
人生いろいろ，可積分系もいろいろ, 富山県立大学紀要, **第15巻**, pp.10-19.

[3] O. Alvarez, L. A. Ferreira and J. Sanchez-Guillen(1998)：
A New Approach to Integrable Theories in any Dimension, *Nucl. Phys.*, **B 529** (1998), pp.689-736.

[4] O. Alvarez, L. A. Ferreira and J. Sanchez-Guillen(2009)：
Integrable theories and loop spaces: fundamentals, applications and new developments, *arXiv:0901.1654*.

# A very brief review of a non-perturbative analysis in gauge theory

L. A. FERREIRA * , Y. KODAMA † , N. SAWADO ‡ and K. TODA §

## Summary

We very briefly review **the submodel theory**, which is a useful *non-perturbative* analysis in gauge theory.

**Key Words:** *nonlinear integrable systems*, *soliton*, *gauge theory*, *non-perturbative analysis*

*Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo
†Department of Physics, Faculty of science and engineering, the Tokyo University of Science
‡Department of Physics, Faculty of science and engineering, the Tokyo University of Science
§Department of Liberal Arts and Sciences, Faculty of Engineering, Toyama Prefectural University