デルタ関数を初期値とする時間依存型消散項付き非線型シュレディンガー方程式について

土井　一幸
(工学部教養教育)

本稿では, デルタ関数を重ね合わせたものを初期値とする消散項付きの非線型シュレディンガー方程式について考察する. ここで, 消散項の係数として (定数関数も含めて) 時間に依存するものを扱う. 本稿の目的は, 非線型項と消散項がどのようにして解の振る舞いに影響を与えるかを解析することである. 特に, 非線型項が解を不安定にするような効果を持つ場合に, 消散項が解の不安定化を阻止するための十分条件を考察する.

キーワード: 非線型シュレディンガー方程式, 時間依存型消散項, デルタ関数, 大域解, 爆発解

1.　序

次のような非線型の発展方程式 (非線型シュレディンガー方程式) を考える:

(1)　$i\partial_t u + \Delta u + id(t)u = \lambda\mathcal{N}(u) \quad \text{in } (0,\infty)\times\mathbf{R}^n,$

ただし $i=\sqrt{-1}$, $n \geq 1$, $\partial_t = \partial/\partial t$, $\Delta = \sum_{k=1}^{n} \partial^2/\partial x_k^2$, $\lambda \in \mathbf{C}\setminus\{0\}$, $d\colon (0,\infty)\to\mathbf{R}$ は $[0,\infty)$ 上局所可積分とし[*1], 未知関数 $u=u(t,x)$ は複素数値であるとする. また, 非線型項 $\mathcal{N}(u)$ は次のものと仮定する:

$$\mathcal{N}(u) = |u|^{p-1}u, \quad p>1.$$

この方程式は, $n=1$, $p=3$, $d(t)$ が正値の定数関数であるときに, 非線型光学においてファイバー内の光パルスの伝播を記述する基本方程式として現れる[*2] [1]. なお, この文脈においては t が光ファイバーに沿った位置を, x $(=x_1)$ が時刻を表す変数であるが, 本稿では t で時刻を, x で位置を表すこととする. ここで, d が正値の定数関数であるとき d は減衰定数を表し, ファイバー損失と呼ばれている. 実際に, 線型項 idu は解を減衰させる効果を持ち, この項は消散項と呼ばれている. この場合の (1) について, 多くの研究がある (例えば [3], [4], [5], [9], [11], [12] など). ここで, d が時刻 t に依存していたとしても, 方程式 (1) における線型項 $id(t)u$ は (ある程度の条件を満たせば) 解に消散性を与えるため, これも (時間依存型の) 消散項と呼ぶことにする.

さて本稿では, 初期値としてデルタ関数 (あるいはそれらの重ね合わせ) を与えたときの方程式 (1) の解の振る舞いについて考察する. 具体的には, $a\in\mathbf{R}^n\setminus\{0\}$ として次の初期値

(2)　$u(0,x) = \sum_{j\in\mathbf{Z}} \mu_j \delta_{ja}(x) \quad \text{for } x\in\mathbf{R}^n$

を与える, ただし, $b\in\mathbf{R}^n$ に対して δ_b は $x=b$ に台を持つデルタ関数, $\{\mu_j\}_{j\in\mathbf{Z}} \in \ell_1^2$ とする. ここで, $\alpha\in\mathbf{R}$ に対して (複素) 数列空間 ℓ_α^2 を次で定義した:

$$\ell_\alpha^2 := \left\{\{A_j\}_{j\in\mathbf{Z}} \subset \mathbf{C}\,;\, \|\{A_j\}_{j\in\mathbf{Z}}\|_{\ell_\alpha^2} < \infty\right\},$$
$$\|\{A_j\}_{j\in\mathbf{Z}}\|_{\ell_\alpha^2} := \Big(\sum_{j\in\mathbf{Z}} (1+|j|^2)^\alpha |A_j|^2\Big)^{1/2}.$$

なお, 記号の煩雑さを避けるため, 以下では $\{A_j\}_{j\in\mathbf{Z}}$ を $\{A_j\}$ と略記する.

1.1　研究の経緯と問題

本研究の動機は, 非線型シュレディンガー方程式に従うデルタ関数 (の重ね合わせ) の時間発展を考察した Kita [7], [8] にある (Banica-Vega [2], Kenig-Ponce-Vega [6] も参照されたい). そこでは $d\equiv 0$, $p<1+2/n$ のときに次のことが示された:

[*1] $d\colon (0,\infty)\to\mathbf{R}$ が $[0,\infty)$ 上局所可積分であることは, 任意の $t>0$ について $\int_0^t |d(s)|\,ds < \infty$ であることと同値である. $[0,\infty)$ 上局所可積分関数の集合を $L^1_{\mathrm{loc}}([0,\infty))$ と書く.

[*2] しかし本稿での考察は, 後述の (4) があるために, $n=1$ の場合には $p<3$ という制限を受けた議論になる.

(i) 初期値問題 (1)–(2) の (時間) 局所解が存在する;
(ii) $\mathrm{Im}\lambda > 0$ ならば, 局所解は有限時刻で爆発する;
(iii) $\mathrm{Im}\lambda \le 0$ ならば, 局所解は大域的に延長される.

特に (ii) から, $\mathrm{Im}\lambda > 0$ のときに非線型項 $\lambda\mathcal{N}(u)$ が (1)–(2) の解を不安定化する効果を持つことがわかる.

この結果を受けて, 著者は $\mathrm{Im}\lambda > 0$, $p < 1 + 2/n$ のときに $d(t)$ を正値の定数関数として, すなわち消散効果のある線型項を付して (1)–(2) を考察した [3]. そこでは, 初期値の大きさ $\|\{\mu_j\}\|_{\ell_1^2}$ が小さければ, 消散項の働きによって非線型項の影響を抑え, 局所解を大域的に延長できることが得られた. 一方で $\|\{\mu_j\}\|_{\ell_1^2}$ が大きければ, 消散項が非線型の影響を制御できずに, (爆発時刻を遅らせることはできるものの) 局所解は相変わらず有限時刻で爆発することも得られた.

以上を踏まえると, $\mathrm{Im}\lambda > 0$, $p < 1 + 2/n$ であって更に d が時間依存する場合には, d にどのような条件を課せば小さな初期値に対する大域解の存在が成り立つのかという問題が現れる (この問題は [7], [8], [3] を含む問題である). そこで, 次節以降でこの問題に対する本稿の結果を述べる. なお, 時間依存する d の具体例についても第 3.1 節にて紹介する.

2. 記号

さて, 上の問題に対する結果を述べるために, いくつかの記号を定義する.

まず, 局所解の存在性 (命題 1) を述べるために必要な記号を用意する. $d \in L^1_{\mathrm{loc}}([0,\infty))$ と $b \in \mathbf{R}^n$ に対して, $U_d(t)\delta_b$ を次の問題の解とする:

$$\begin{cases} i\partial_t u + \Delta u + id(t)u = 0 & \text{in } (0,\infty)\times\mathbf{R}^n, \\ u(0,x) = \delta_b(x) & \text{for } x \in \mathbf{R}^n. \end{cases}$$

これを解けば,

$$\begin{aligned} U_d(t)\delta_b &= \exp\Big(-\int_0^t d(s)\,ds + i\Delta t\Big)\delta_b \\ &= \exp\Big(-\int_0^t d(s)\,ds\Big)\frac{\exp\Big(i\dfrac{|x-b|^2}{4t}\Big)}{(4\pi it)^{n/2}} \end{aligned}$$

であることがわかる. さらに, $p > 1$ に対して関数 $f\colon (0,\infty) \to (0,\infty)$ を

$$f(t) := \Big(\exp\Big(-\int_0^t d(s)\,ds\Big)(4\pi t)^{-n/2}\Big)^{p-1} \tag{3}$$

と定める. ここで, $p < 1 + 2/n$ であることは f が区間 $(0,1]$ で可積分となるための必要十分条件であることに注意する:

$$1 < p < 1 + \frac{2}{n} \iff \int_0^1 f(t)\,dt < \infty. \tag{4}$$

また, (4) でないとき, すなわち $p \ge 1 + 2/n$ のときは, Kenig-Ponce-Vega [6] によって初期値が $u(0,x) = \delta_0(x)$ のときの非線型シュレディンガー方程式は非適切となることが得られていることにも注意する.

次に, 主結果である解の時間大域性 (定理 2) を述べるために必要な記号を用意する. $\mathbf{T} = \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$ とする. $1 \le q \le \infty$ に対して $\mathbf{T}$ 上のルベーグ空間 $L^q = L^q(\mathbf{T})$ を $L^q := \{g\colon \mathbf{T} \to \mathbf{C};\, g \text{ は可測で } \|g\|_{L^q} < \infty\}$ とし, そのノルムを

$$\|g\|_{L^q} := \begin{cases} \Big(\displaystyle\int_0^{2\pi} |g(\theta)|^q\,d\theta\Big)^{1/q} & (1 \le q < \infty), \\ \operatorname*{ess.sup}_{\theta\in\mathbf{T}} |g(\theta)| & (q = \infty) \end{cases}$$

により定める. $g, h \in L^2$ に対して

$$\langle g, h\rangle_\theta = \int_0^{2\pi} g(\theta)\overline{h(\theta)}\,d\theta$$

と定める, ただし $\overline{h(\theta)}$ は $h(\theta)$ の複素共役を表すものとする. また, $\mathbf{T}$ 上のソボレフ空間 $H^1 = H^1(\mathbf{T})$ を $H^1 = \{g(\theta) \in L^2;\, \|g\|_{H^1} < \infty\}$ とし, そのノルムを $\|g\|_{H^1} = \|\{C_j\}\|_{\ell_1^2}$ により定める, ここで $C_j = (2\pi)^{-1/2}\int_0^{2\pi} g(\theta)e^{-ij\theta}\,d\theta$ とした. これらの関数空間を用いて, $\mathrm{Im}\lambda > 0$, $\int_0^t f(t)\,dt < \infty$ という仮定のもとで次の正定数を用意する:

$$\begin{cases} C_0 := C_1 + C_2, \\ C_1 := \gamma_{p+1}^{p+1}\mathrm{Im}\lambda, \\ C_2 := p\gamma_\infty^{p-1}|\lambda|. \end{cases} \tag{5}$$

ここで, $\gamma_{p+1}, \gamma_\infty$ はガリアルド・ニレンベルグの不等式の最良定数とした, すなわち次の不等式を満たす最小の正定数 C のことである: 任意の $v \in H^1(\mathbf{T})$ に対して

$$\|v\|_{L^{p+1}}^{p+1} \le C\|v\|_{L^2}^{(p+3)/2}\|v\|_{H^1}^{(p-1)/2} \quad (1 \le p < \infty), \tag{6}$$

$$\|v\|_{L^\infty} \le C\|v\|_{L^2}^{1/2}\|v\|_{H^1}^{1/2}. \tag{7}$$

さらに, $\varepsilon_0, \varepsilon_1 > 0$ を次で定める:

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 &:= \Big((p-1)\mathrm{Im}\lambda\int_0^\infty f(t)\,dt\Big)^{-1/(p-1)}, \\ \varepsilon_1 &:= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Big((p-1)C_0\int_0^\infty f(t)\,dt\Big)^{-1/(p-1)} \\ &\Big(= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Big(\frac{\mathrm{Im}\lambda}{C_0}\Big)^{1/(p-1)}\varepsilon_0\Big). \end{aligned} \tag{8}$$

3. 主結果

主結果を述べる前に, 局所解の存在について述べる.

命題 1 (局所解の存在)**.** $1 < p < 1 + 2/n$ と仮定する. このとき, ある $T > 0$ および $\{A_j(t)\} \in C([0,T);\ell^2_1) \cap C^1((0,T);\ell^2_1)$ が一意的に存在して

(9) $$u = \sum_{j\in\mathbf{Z}} A_j(t)U_d(t)\delta_{ja} \ \left(\in L^\infty_{\mathrm{loc}}(0,T;L^\infty(\mathbf{R}^n))\right)$$

が (1)–(2) の解かつ $A_j(0) = \mu_j$ $(j \in \mathbf{Z})$ となる.

注意 1. この命題は, (1)–(2) に対する解の一意性までは保証しておらず, (9) という形の解が存在し, さらにこの形の解は一意的であると主張している.

命題 1 の証明のアイディアは [7], [8] のそれに基づく. 具体的には偏微分方程式 (1) を $\{A_j(t)\}$ の微分方程式系に帰着させ, 縮小写像の原理を用いて解の一意存在性を示す. その際に (4) を用いる.

それでは, $\mathrm{Im}\lambda > 0$ の場合について, 上の局所解の時間大域的性質を述べる. ここでは f の $[1,\infty)$ での広義可積分性が鍵となる.

定理 2 (時間大域性)**.** $1 < p < 1 + 2/n$, $\mathrm{Im}\lambda > 0$ とする. このとき, 命題 1 において存在した $\{A_j(t)\}$ について, 次が成り立つ.

(i) $\displaystyle\int_0^\infty f(t)\,dt = \infty$ のとき:
任意の $\{\mu_j\} \in \ell^2_1$ に対して, ある $T^* > 0$ が存在して $\displaystyle\lim_{t\to T^*-0} \|\{A_j(t)\}\|_{\ell^2_1} = \infty$ となる.

(ii) $\displaystyle\int_0^\infty f(t)\,dt < \infty$ のとき:
(a) $\|\{\mu_j\}\|_{\ell^2_0} > \varepsilon_0$ ならば, ある $T^* > 0$ が存在して $\displaystyle\lim_{t\to T^*-0} \|\{A_j(t)\}\|_{\ell^2_1} = \infty$ となる.
(b) $\|\{\mu_j\}\|_{\ell^2_1} \le \varepsilon_1$ ならば, ある $\{A_j(t)\} \in C([0,\infty);\ell^2_1) \cap C^1((0,\infty);\ell^2_1)$ が一意的に存在して (9) が (1)–(2) の大域解となる. さらに $\|\{\mu_j\}\|_{\ell^2_1} < \varepsilon_1$ ならば, ある $\{\nu_j\} \in \ell^2_1$ が存在して $\displaystyle\lim_{t\to\infty} \|\{A_j(t)\} - \{\nu_j\}\|_{\ell^2_1} = 0$ となる.

注意 2. この定理の証明は本質的に解のノルムについて微分不等式を得るところにある. このような手法は Ozawa-Yamazaki [10] や Zhang [13] においても用いられている.

注意 3. (8) において定められた ε_0 は (よって ε_1 も) a に依らない, ただし a とは初期値 (2) で選んだもの, すなわち初期値を成すデルタ関数たちの台を生成するものである. このことは定理の証明における (37) や (38) からわかる.

注意 4. 定理 2 (ii) において, $\|\{\mu_j\}\|_{\ell^2_0} \le \varepsilon_0$ かつ $\varepsilon_1 < \|\{\mu_j\}\|_{\ell^2_1}$ のときは, $\{A_j(t)\}$ が大域的に存在するか否か一般には未解決である. しかし次節で述べるように, 初期値がデルタ関数 1 つのみのときには, 解の大域存在性を完全に決める初期値のサイズを選ぶことができる.

本節を終えるに当たって, ε_0 を具体的に計算できる $d(t)$ の例を挙げ, 実際に計算してみる.

3.1 具体的な d に対する ε_0 の計算例

ここでも $1 < p < 1 + n/2$, $\mathrm{Im}\lambda > 0$ とし, さらに $\gamma = n(p-1)/2$ (< 1) とする.

例 1 (Doi [3])**.** $d_0 \in \mathbf{R}$ とし, $d(t) \equiv d_0$ とする. このとき $f(t) = \exp(-d_0(p-1)t)(4\pi t)^{-\gamma}$ であり,

$$\int_0^\infty f(t)\,dt = \begin{cases} \dfrac{(p-1)^{\gamma-1}}{(4\pi)^\gamma d_0^{1-\gamma}}\Gamma(1-\gamma) & \text{if } d_0 > 0, \\ \infty & \text{if } d_0 \le 0 \end{cases}$$

となる, ただし Γ をガンマ関数とした. ここで $d_0 > 0$ とすれば ε_0 は次の値となる:

$$\varepsilon_0 = \left(\frac{4\pi}{p-1}\right)^{n/2}\left(\frac{d_0^{1-\gamma}}{(\mathrm{Im}\lambda)\Gamma(1-\gamma)}\right)^{1/(p-1)}.$$

例 2. $d_0 \in \mathbf{R}$, $\alpha < 1$ に対し,

$$d(t) = \frac{d_0}{t^\alpha} \quad (t > 0)$$

とする ($\alpha = 0$ の場合が例 1 である). このとき,

$$f(t) = \exp\left(-\frac{d_0(p-1)}{1-\alpha}t^{1-\alpha}\right)(4\pi t)^{-\gamma}$$

である. これより

$$\int_0^\infty f(t)\,dt = \begin{cases} I & \text{if } d_0 > 0, \\ \infty & \text{if } d_0 \le 0 \end{cases}$$

である, ただし

$$I = \frac{(p-1)^{((\gamma-\alpha)/(1-\alpha))-1}\Gamma\big((1-\gamma)/(1-\alpha)\big)}{(4\pi)^\gamma(1-\alpha)^{(\gamma-\alpha)/(1-\alpha)}d_0^{(1-\gamma)/(1-\alpha)}}$$

とした. ここで $d_0 > 0$ とすれば ε_0 は次の値となる:

$$\varepsilon_0 = (4\pi)^{\frac{n}{2}}\left(\frac{1-\alpha}{p-1}\right)^{\frac{\gamma-\alpha}{(1-\alpha)(p-1)}}\left(\frac{d_0^{(1-\gamma)/(1-\alpha)}}{(\mathrm{Im}\lambda)\Gamma(\frac{1-\gamma}{1-\alpha})}\right)^{\frac{1}{p-1}}.$$

例 3. $d_0 \in \mathbf{R}$ に対し,

$$d(t) = \frac{d_0}{1+t} \quad (t > 0)$$

とする. このとき,

$$f(t) = (1+t)^{-d_0(p-1)}(4\pi t)^{-\gamma}$$

である. これより

$$\int_0^\infty f(t)\,dt = \begin{cases} I & \text{if } d_0 > (1-\gamma)/(p-1), \\ \infty & \text{if } d_0 \le (1-\gamma)/(p-1) \end{cases}$$

である, ただし

$$I = \frac{1}{(4\pi)^\gamma} B(1-\gamma, d_0(p-1)-(1-\gamma))$$

(B はベータ関数) とした. ここで $d_0 > (1-\gamma)/(p-1)$, $D_0 = d_0(p-1)-(1-\gamma)$ とすれば ε_0 は次の値となる:

$$\varepsilon_0 = \frac{(4\pi)^{n/2}}{\big((p-1)(\mathrm{Im}\lambda)B(1-\gamma, D_0)\big)^{1/(p-1)}}.$$

4. 具体例: $u(0,x) = \mu\delta_0(x)$ の場合

本節では, 初期値 (2) のデルタ関数が 1 つのみのときの方程式 (1) の解について考察する. 具体的には初期値を

$$u(0,x) = \mu\delta_0(x) \quad \text{for } x \in \mathbf{R}^n \tag{10}$$

とする, ただし $\mu > 0$ とする. ここで, 一般には初期値 (10) の係数 μ を複素数として考えるが, 方程式 (1) がゲージ不変性を持つ[*3]ことから $\mu > 0$ として一般性を失わないことに注意する. このとき, 厳密解を得ることにより命題 1, 定理 2 よりも詳細な情報を得ることができる.

命題 3. $1 < p < 1 + 2/n$ と仮定する. このとき, 次が成り立つ:

(i) (局所解の存在) ある $T > 0$ が存在して

$$A(t) = \begin{cases} \mu F(t)^{i\lambda/((p-1)\mathrm{Im}\lambda)} & \text{if } \mathrm{Im}\lambda \neq 0, \\ \mu \exp\big(-i\lambda\mu^{p-1}\int_0^t f(\tau)\,d\tau\big) & \\ & \text{if } \mathrm{Im}\lambda = 0 \end{cases} \tag{11}$$

とすると

$$u = A(t)U_d(t)\delta_0 \ \big(\in L^\infty_{\mathrm{loc}}(0,T; L^\infty(\mathbf{R}^n))\big) \tag{12}$$

が (1)–(10) の解となる, ただし $F\colon [0,\infty) \to \mathbf{R}$ を

$$F(t) = 1 - (p-1)(\mathrm{Im}\lambda)\mu^{p-1}\int_0^t f(\tau)\,d\tau$$

と定めた.

(ii) $\mathrm{Im}\lambda > 0$ かつ $\int_0^\infty f(t)\,dt = \infty$ のとき:
任意の $\mu > 0$ に対して, ある $T^* > 0$ が存在して $\lim_{t\to T^*-0} |A(t)| = \infty$ となる.

(iii) $\mathrm{Im}\lambda > 0$ かつ $\int_0^\infty f(t)\,dt < \infty$ のとき:
  (a) $\mu > \varepsilon_0$ ならば, ある $T^* > 0$ が存在して $\lim_{t\to T^*-0} |A(t)| = \infty$ となる.
  (b) $\mu \le \varepsilon_0$ ならば, $A(t)$ は時間大域的に存在する. さらに, $\mu < \varepsilon_0$ ならば, ある $\nu_0 \in \mathbf{C}\setminus\{0\}$ が存在して $\lim_{t\to\infty} A(t) = \nu_0$ となる. また, $\mu = \varepsilon_0$ ならば, $\lim_{t\to\infty} \|u(t,\cdot)-\varphi(t,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbf{R}^n)} = 0$ となる, ただし

$$\varphi(t,x) = \Big(\frac{F(t)^{\frac{i\mathrm{Re}\lambda}{\mathrm{Im}\lambda}} d(t)}{\mathrm{Im}\lambda}\Big)^{\frac{1}{p-1}} i^{-\frac{n}{2}} e^{i\frac{|x-a|^2}{4t}}$$

  とした.

(iv) $\mathrm{Im}\lambda \le 0$ のとき: $A(t)$ は時間大域的に存在する.

注意 5. 命題 3-(i) の F は連続関数である.

注意 6. $\lim_{t\to\infty} d(t)$ が存在するとき, その極限値を d_∞ とすると, 命題 3-(iiib) における φ について,

$$\lim_{t\to\infty} |\varphi(t,x)| = \Big(\frac{d_\infty}{\mathrm{Im}\lambda}\Big)^{1/(p-1)}$$

となる. これは, $d(t)$ を $t\to\infty$ で大きくすれば (1)–(10) の解の絶対値も大きくできることを意味している. つまり, ちょうどよいサイズの初期値から時間発展させることで非線型項と消散項の影響がうまく釣り合い, 適当な大きさの解を得ることができ, しかもその大きさは d_∞ の選び方によって自由にコントロールできるということになる.

本節の残りの部分で命題 3 を示す.

4.1 命題 3 の証明

(i) について. (12) を (1)–(10) に代入すると $A(t)$ について次の常微分方程式を得る:

$$\begin{cases} i\dfrac{dA}{dt} = \lambda f(t)\mathcal{N}(A), & \text{for } t \in (0,T), \\ A(0) = \mu. \end{cases} \tag{13}$$

(13) を解くために (13) の両辺に $\overline{A(t)}$ を掛ける:

$$i\frac{dA}{dt}\overline{A} = \lambda f(t)|A|^{p+1}.$$

[*3] ここで, 方程式がゲージ不変性を持つということを次のように定義している: u を考えている方程式の解とするとき, 任意の $\theta \in \mathbf{R}$ に対して $e^{i\theta}u$ もその方程式の解となる.

この両辺の虚部を取って 2 倍すると

$$\frac{d}{dt}|A(t)|^2 = 2(\mathrm{Im}\lambda)f(t)|A(t)|^{p+1}$$

となり, これより

$$-\frac{2}{p-1}\frac{d}{dt}|A(t)|^{-(p-1)} = 2(\mathrm{Im}\lambda)f(t)$$

を得る. ここで両辺を積分すれば

$$|A(t)|^{p-1} = \frac{\mu^{p-1}}{F(t)} \tag{14}$$

となる. このとき, (14) の右辺の分母 $F(t)$ における $\int_0^t f(\tau)\,d\tau$ は, $d \in L^1_{\mathrm{loc}}([0,\infty))$ であることと $p < 1+2/n$ であることから意味を持つことに注意する. また, $F(t)$ は十分小さな $T > 0$ に対して正となるため, $|A(t)|$ $(0 \le t < T)$ 自体も意味を持つことに注意する. あとは (14) を (13) に代入すれば (11) を得て, これにより (i) が示された.

(ii) について. $\mathrm{Im}\lambda > 0$ より F は単調減少であり, また $\int_0^\infty f(t)\,dt = \infty$ より $\mathcal{R}(F) = (-\infty, 1]$ である[*4]. よって中間値の定理から $F(T^*) = 0$ となる $T^* > 0$ が一意的に存在する. これと (14) より $\lim_{t\to T^*-0}|A(t)| = \infty$ となる. よって (ii) が示された.

(iii) について. (a): $\mathrm{Im}\lambda > 0$ より F は単調減少であり, また $\mu > \varepsilon_0$ より $\mathcal{R}(F)\cap(-\infty,0) \ne \emptyset$ である. よって中間値の定理から $F(T^*) = 0$ となる $T^* > 0$ が一意的に存在する. これと (14) より $\lim_{t\to T^*-0}|A(t)| = \infty$ となる.

(b): $\mathrm{Im}\lambda > 0$, $\mu \le \varepsilon_0$ より $\mathcal{R}(F) = (0,1]$ である. よって任意の $t > 0$ まで $A(t)$ は存在する. さらに $\mu < \varepsilon_0$ とすれば $\lim_{t\to\infty} F(t) = 1 - (\mu/\varepsilon_0)^{p-1} > 0$ となるので,

$$\lim_{t\to\infty} A(t) = \mu\Big(1 - \Big(\frac{\mu}{\varepsilon_0}\Big)^{p-1}\Big)^{i\lambda/((p-1)\mathrm{Im}\lambda)}$$

となる. 一方 $\mu = \varepsilon_0$ とすると, ロピタルの定理より

$$\lim_{t\to\infty}\|u(t,\cdot) - \varphi(t,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbf{R}^n)} = 0$$

が導かれる. よって (iii) が示された.

(iv) について. $\mathcal{R}(F) \subset [1,\infty)$ より任意の $t \ge 0$ まで $A(t)$ は存在する. よって (iv) が示された.

以上より命題 3 が示された. □

[*4] $\mathcal{R}(F)$ は F の値域 $\{F(t) \in \mathbf{R} \mid t \in [0,\infty)\}$ を表す.

注意 7. 命題 3 の証明と似た議論によって, $p < 1+2/n$, $\mathrm{Im}\lambda \ge 0$, $\int_0^\infty f(t)\,dt < \infty$ であれば次の最終値問題

$$\begin{cases} i\dfrac{dA}{dt} = \lambda f(t)\mathcal{N}(A), \quad \text{for } t \in (0,\infty), \\ \lim\limits_{t\to\infty} A(t) = \nu \end{cases}$$

の解も一意的に定まることがわかる, ただし, $\nu > 0$ とした[*5]. 実際, 解は

$$A(t) = \begin{cases} \nu G(t)^{i\lambda/((p-1)\mathrm{Im}\lambda)} & \text{if } \mathrm{Im}\lambda > 0, \\ \nu\exp\left(i\lambda\nu^{p-1}\displaystyle\int_t^\infty f(\tau)\,d\tau\right) & \\ & \text{if } \mathrm{Im}\lambda = 0 \end{cases}$$

であり, 特に $\mathrm{Im}\lambda > 0$ のときの $A(0)$ は

$$A(0) = \nu\Big(1 + \Big(\frac{\nu}{\varepsilon_0}\Big)^{p-1}\Big)^{i\lambda/((p-1)\mathrm{Im}\lambda)}$$

となる, ただし $G\colon [0,\infty) \to \mathbf{R}$ を

$$G(t) = 1 + (p-1)(\mathrm{Im}\lambda)\mu^{p-1}\int_t^\infty f(\tau)\,d\tau$$

と定めた.

5. 命題 1 の証明

命題 1 を示すために, 以下の 2 つの補題を用いる (補題 4 では $d \equiv 0$ の場合を示すことが本質的であり, この場合は Kita [8] によって証明されている).

補題 4. $\{A_j(t)\} \in C([0,T);\ell^2_1)$ とする. このとき次が成立する:

$$\mathcal{N}\Big(\sum_{j\in\mathbf{Z}} A_j(t)U_d(t)\delta_{ja}\Big) = f(t)\sum_{j\in\mathbf{Z}}\widetilde{A}_j(t)U_d(t)\delta_{ja}, \tag{15}$$

ただし $\widetilde{A}_j(t) = (2\pi)^{-1}e^{-i|ja|^2/4t}\langle\mathcal{N}(v), e^{-ij\theta}\rangle_\theta$,

$$v = v(t,\theta) = \sum_{j\in\mathbf{Z}} A_j(t)e^{-ij\theta}e^{i|ja|^2/4t}$$

とし, $f(t)$ は (3) で定義されたものとする.

証明. まず, $E_d(t) := \exp\left(-\int_0^t d(s)\,ds\right)$ とおく. このとき $U_d(t) = E_d(t)U_0(t)$ より

$$\mathcal{N}\Big(\sum_{j\in\mathbf{Z}} A_j(t)U_d(t)\delta_{ja}\Big) = E_d(t)^p\mathcal{N}\Big(\sum_{j\in\mathbf{Z}} A_j(t)U_0(t)\delta_{ja}\Big) \tag{16}$$

[*5] ここでも $\nu \in \mathbf{C}$ として考えるべきだが, 方程式がゲージ不変性を持つことから $\nu > 0$ として一般性を失わない.

が成り立つ.

また, Kita [8] において $d=0$ の場合の (15) すなわち

$$\mathcal{N}\big(\sum_{j\in\mathbf{Z}} A_j(t)U_0(t)\delta_{ja}\big) = (4\pi t)^{-n(p-1)/2}\sum_{j\in\mathbf{Z}}\widetilde{A}_j(t)U_0(t)\delta_{ja} \tag{17}$$

が得られている. 実際, $U_0(t)$ が $U_0(t)=M_tD_t\mathcal{F}M_t$ と分解されることに注意する. ここで, M_t, D_t, $\mathcal{F}$ はそれぞれ, 関数 $g(x)$ に対して次の通りに作用するものである:

$$\begin{aligned}[M_tg](x) &:= e^{i|x|^2/4t}g(x),\\ [D_tg](x) &:= (2it)^{-n/2}g(x/2t),\\ [\mathcal{F}g](x) &:= (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbf{R}^n} g(y)e^{-iy\cdot x}\,dy,\end{aligned}$$

ただし $y\cdot x$ は x と y の標準内積とする. 今, $\mathcal{N}$ がゲージ不変性を持つ[*6]ことから

$$\begin{aligned}\mathcal{N}([M_tg](x)) &= M_t[\mathcal{N}(g)](x),\\ \mathcal{N}([D_tg](x)) &= (2t)^{-n(p-1)/2}D_t[\mathcal{N}(g)](x)\end{aligned}$$

が成り立つ. これより,

$$\begin{aligned}&\mathcal{N}\big(\sum_{j\in\mathbf{Z}} A_j(t)U_0(t)\delta_{ja}\big)\\ &= (2t)^{-n(p-1)/2}M_tD_t\mathcal{N}\big(\sum_{j\in\mathbf{Z}} A_j(t)\mathcal{F}M_t\delta_{ja}\big)\end{aligned} \tag{18}$$

である. また,

$$\begin{aligned}&\mathcal{N}\big(\sum_{j\in\mathbf{Z}} A_j(t)\mathcal{F}M_t\delta_{ja}\big)(x)\\ &= \mathcal{N}\big((2\pi)^{-n/2}\sum_{j\in\mathbf{Z}} A_j(t)e^{-ija\cdot x+i|ja|^2/4t}\big)\end{aligned} \tag{19}$$

であるので, $a\cdot x=\theta$ とおくと上の関数は周期 2π の周期関数 $\mathcal{N}\big((2\pi)^{-n/2}v(t,\theta)\big)$ となる. そこでこれをフーリエ級数展開すると,

$$\begin{aligned}&\mathcal{N}\big((2\pi)^{-n/2}v(t,\theta)\big)\\ &= (2\pi)^{-1-np/2}\sum_{j\in\mathbf{Z}}\langle\mathcal{N}(v(t,\varphi),e^{ij\varphi}\rangle_\varphi e^{ij\theta}\\ &= (2\pi)^{-1-np/2}\sum_{j\in\mathbf{Z}}\langle\mathcal{N}(v(t,\varphi),e^{-ij\varphi}\rangle_\varphi e^{-ij\theta}\\ &= (2\pi)^{-np/2}\sum_{j\in\mathbf{Z}}\widetilde{A}_j(t)e^{-ij\theta}e^{i|ja|^2/4t}\end{aligned} \tag{20}$$

[*6] ここで, $\mathcal{N}$ がゲージ不変性を持つということを次のように定義している: 任意の $z\in\mathbf{C}$, $\theta\in\mathbf{R}$ に対して $\mathcal{N}(e^{i\theta}z)=e^{i\theta}\mathcal{N}(z)$ が成り立つ.

となる. ここで再び $\theta=a\cdot x$ を用いて

$$\begin{aligned}&\sum_{j\in\mathbf{Z}}\widetilde{A}_j(t)e^{-ij\theta}e^{i|ja|^2/4t}\\ &\qquad= (2\pi)^{n/2}\sum_{j\in\mathbf{Z}}\widetilde{A}_j(t)\mathcal{F}M_t\delta_{ja}(x)\end{aligned} \tag{21}$$

が成り立つ. よって (18) から (21) を併せることで (17) が得られた.

以上より, (16) と (17) を併せて (15) が得られる. □

補題 5 (Kita [7], [8]). $T>0$ とし, $I=[0,T)$ または $I=[0,\infty)$ とする. また, $\{A_j\}$, $\{A_j^{(1)}\}$, $\{A_j^{(2)}\}\in L^\infty(I;\ell_1^2)$ に対し, $\{\widetilde{A}_j\}$, $\{\widetilde{A}_j^{(1)}\}$, $\{\widetilde{A}_j^{(2)}\}$ をそれぞれ補題 4 で与えられる列とする. このとき, 任意の $t\in I$ に対して次が成り立つ:

$$\|\{\widetilde{A}_j(t)\}\|_{\ell_1^2}\le C\|\{A_j\}\|_{L^\infty(I;\ell_1^2)}^p, \tag{22}$$

$$\begin{aligned}&\|\{\widetilde{A}_j^{(1)}(t)\}-\{\widetilde{A}_j^{(2)}(t)\}\|_{\ell_0^2}\\ &\qquad\le CM^{p-1}\|\{A_j^{(1)}\}-\{A_j^{(2)}\}\|_{L^\infty(I;\ell_0^2)},\end{aligned} \tag{23}$$

ただし $M=\max_{m=1,2}\|\{A_j^{(m)}\}\|_{L^\infty(I;\ell_1^2)}$ とする.

以下の証明は [8] のそれを詳しく述べたものである.

証明. まず (22) を示す.

$$\|\{\widetilde{A}_j(t)\}\|_{\ell_1^2}^2 = \sum_{j\in\mathbf{Z}}|\widetilde{A}_j(t)|^2+\sum_{j\in\mathbf{Z}}|j\widetilde{A}_j(t)|^2$$

より, $\sum_{j\in\mathbf{Z}}|\widetilde{A}_j(t)|^2$ と $\sum_{j\in\mathbf{Z}}|j\widetilde{A}_j(t)|^2$ をそれぞれ評価する. 今,

$$(2\pi)^{-1/2}\langle\mathcal{N}(v(t,\theta)),e^{ij\theta}\rangle_\theta = (2\pi)^{1/2}e^{i|ja|^2/4t}\widetilde{A}_{-j}(t)$$

であることに注意すると, パーセヴァルの等式より

$$\|\mathcal{N}(v(t))\|_{L^2}^2 = 2\pi\sum_{j\in\mathbf{Z}}|\widetilde{A}_j(t)|^2$$

が成り立つ. よって

$$\sum_{j\in\mathbf{Z}}|\widetilde{A}_j(t)|^2 = \frac{1}{2\pi}\|\mathcal{N}(v(t))\|_{L^2}^2\le\|v(t)\|_{L^\infty}^{2p} \tag{24}$$

となる. ここで, シュワルツの不等式より

$$\begin{aligned}&\|v(t)\|_{L^\infty}\\ &= \operatorname*{ess.sup}_{\theta\in\mathbf{T}}|v(t,\theta)|\\ &= \operatorname*{ess.sup}_{\theta\in\mathbf{T}}\Big|\sum_{j\in\mathbf{Z}}A_j(t)e^{-ij\theta}e^{i|ja|^2/4t}\Big|\\ &\le\Big(\sum_{j\in\mathbf{Z}}(1+|j|^2)|A_j(t)|^2\Big)^{1/2}\Big(\sum_{j\in\mathbf{Z}}\frac{1}{1+|j|^2}\Big)^{1/2}\\ &\le C\|\{A_j(t)\}\|_{\ell_1^2}\\ &\le C\|\{A_j\}\|_{L^\infty(I;\ell_1^2)}\end{aligned} \tag{25}$$

であるので, (24) と (25) を併せて

$$\sum_{j\in\mathbf{Z}} |\widetilde{A}_j(t)|^2 \le C\|\{A_j\}\|^{2p}_{L^\infty(I;\ell^2_1)} \tag{26}$$

を得る. 次に部分積分から

$$j\widetilde{A}_j(t) = \frac{i}{2\pi} e^{-i|ja|^2/4t} \langle \partial_\theta \mathcal{N}(v(t,\theta)), e^{-ij\theta}\rangle_\theta$$

がわかるので, パーセヴァルの等式より

$$\sum_{j\in\mathbf{Z}} |j\widetilde{A}_j(t)|^2 = \frac{1}{2\pi}\|\partial_\theta \mathcal{N}(v(t))\|^2_{L^2} \tag{27}$$

となる. ここで, 簡単な計算によって

$$\partial_\theta \mathcal{N}(v) = \frac{p+1}{2}|v|^{p-1}\partial_\theta v + \frac{p-1}{2}|v|^{p-3}v^2\overline{\partial_\theta v}$$

であることがわかるので,

$$\|\partial_\theta \mathcal{N}(v)\|_{L^2} \le p\|v\|^{p-1}_{L^\infty}\|\partial_\theta v\|_{L^2} \tag{28}$$

となることに注意する. また,

$$\begin{aligned} \|\partial_\theta v(t)\|_{L^2} &= \Big\| \sum_{j\in\mathbf{Z}} (-i)jA_j(t)e^{i|ja|^2/4t}\Big\|_{L^2} \\ &= (2\pi)^{1/2}\Big(\sum_{j\in\mathbf{Z}} |jA_j(t)|^2\Big)^{1/2} \\ &\le C\|\{A_j(t)\}\|_{\ell^2_1} \\ &\le C\|\{A_j\}\|_{L^\infty(I;\ell^2_1)} \end{aligned} \tag{29}$$

であるので, (27) から (29) までと (25) を併せて

$$\sum_{j\in\mathbf{Z}} |j\widetilde{A}_j(t)|^2 \le C\|\{A_j\}\|^{2p}_{L^\infty(I;\ell^2_1)} \tag{30}$$

を得る. よって (26) と (30) より, (22) が成り立つ.

次に (23) を示す. $m = 1, 2$ に対して

$$v_m(t,\theta) = \sum_{j\in\mathbf{Z}} A^{(m)}_j e^{-ij\theta} e^{i|ja|^2/4t}$$

とおくと, $\{A^{(m)}_j\}$ の定義及びパーセヴァルの等式から

$$\begin{aligned} \|\{\widetilde{A}^{(1)}_j(t)\} - \{\widetilde{A}^{(2)}_j(t)\}\|^2_{\ell^2_0} &= \sum_{j\in\mathbf{Z}} |\widetilde{A}^{(1)}_j(t) - \widetilde{A}^{(2)}_j(t)|^2 \\ &= \frac{1}{2\pi}\|\mathcal{N}(v_1(t)) - \mathcal{N}(v_2(t))\|^2_{L^2} \end{aligned} \tag{31}$$

が成り立つ. ここで

$$|\mathcal{N}(v_1) - \mathcal{N}(v_2)| \le C(|v_1|^{p-1} + |v_2|^{p-1})|v_1 - v_2|$$

に気を付ければ, (31), (25) と併せて (23) を得る.

以上により補題 5 が示された. □

これらの補題を用いて, 命題 1 の証明を行う. 議論の方針も [7], [8] (あるいは [3]) に従えばよい.

命題 1 の証明. (9) を (1) に代入する. このとき, 補題 4 と $i\partial_t U_d(t)\delta_{ja} + \Delta U_d(t)\delta_{ja} + id(t)U_d(t)\delta_{ja} = 0$ であることを用いて

$$\sum_{j\in\mathbf{Z}} i\frac{dA_j}{dt}U_d(t)\delta_{ja} = \sum_{j\in\mathbf{Z}} \lambda f(t)\widetilde{A}_j U_d(t)\delta_{ja}$$

を得る. ここで, $\sum_{j\in\mathbf{Z}} B_j(t)U_d(t)\delta_{ja} = 0$ であることと任意の $j\in\mathbf{Z}$ に対して $B_j(t) = 0$ となることは同値であることに注意する. 実際, $\sum_{j\in\mathbf{Z}} B_j(t)U_d(t)\delta_{ja} = 0$ と仮定して, 両辺をフーリエ変換し, 添え字 j に依存しない因子を両辺にかけると $\sum_{j\in\mathbf{Z}} B_j(t)e^{-ija\cdot\xi} = 0$ となる. ここで $a\cdot\xi = \theta$ とおいて上の等式の左辺を周期 2π の周期関数とみなすことにより $B_j(t) = 0$ が従う. これより, 次の常微分方程式系を得る:

$$\begin{cases} i\dfrac{dA_j}{dt} = \lambda f(t)\widetilde{A}_j, & \text{for } t\in(0,T),\ j\in\mathbf{Z}, \\ A_j(0) = \mu_j. \end{cases} \tag{32}$$

命題 1 を示すには, (32) に対する (考えるクラスの中での) 解の一意存在性を示せば十分である. これを示すために, 次の積分方程式系を考える:

$$\begin{aligned} A_j(t) &= \mu_j - i\lambda\int_0^t f(\tau)\widetilde{A}_j(\tau)\,d\tau \\ &=: [\Phi_j(\{A_k\})](t), \quad t\in[0,T),\ j\in\mathbf{Z}. \end{aligned} \tag{33}$$

以下では縮小写像の原理によって (32) の解の一意存在性を導く. そのために写像 $\Phi\colon \boldsymbol{A} = \{A_j\} \mapsto \{\Phi_j(\boldsymbol{A})\}$ が縮小性をもつ空間を設定する. $\rho = \|\{\mu_j\}\|_{\ell^2_1}$ とし

$$\begin{aligned} \overline{B_{2\rho}} = \big\{&\{A_j\}\in L^\infty(0,T;\ell^2_1); \\ &\|\{A_j\}\|_{L^\infty(0,T;\ell^2_1)} \le 2\rho\big\} \end{aligned}$$

とおく, ここで $\overline{B_{2\rho}}$ の位相を $L^\infty(0,T;\ell^2_0)$-ノルムにより定める. このとき $\overline{B_{2\rho}}$ はこの位相について閉である. これより $\overline{B_{2\rho}}$ はこの位相について完備である. また, 補題 5 から, すべての $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}\in\overline{B_{2\rho}}$ に対して次の評価が成り立つ:

$$\|\Phi(\boldsymbol{A})\|_{L^\infty(0,T;\ell^2_1)} \le \rho + C(2\rho)^p\int_0^T f(\tau)\,d\tau, \tag{34}$$

$$\begin{aligned} &\|\Phi(\boldsymbol{A}) - \Phi(\boldsymbol{B})\|_{L^\infty(0,T;\ell^2_0)} \\ &\quad\le C(2\rho)^{p-1}\int_0^T f(\tau)\,d\tau\,\|\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}\|_{L^\infty(0,T;\ell^2_0)}. \end{aligned} \tag{35}$$

(34) と (35) から, $T > 0$ を十分小さくとることにより写像 Φ は $\overline{B_{2\rho}}$ 上の縮小写像となる. よって縮小写像の原理から $\boldsymbol{A} = \{A_j\} \in L^\infty(0,T;\ell_1^2)$ で (33) の解となるものが存在する. また, ルベーグの収束定理から $\boldsymbol{A} \in C^1([0,T);\ell_1^2)$ が従う. $C([0,T);\ell_0^2)$ における一意性も標準的な議論より従う.

以上より命題 1 が示された. □

6. 定理 2 の証明

まず, 補題 4 において $\widetilde{A}_j(t)$ を定義する際に用いられた $v(t,\theta) = \sum_{j\in\mathbf{Z}} A_j(t)e^{-ij\theta}e^{i|ja|^2/4t}$ は, (32) より

$$i\partial_t v = -\frac{|a|^2}{4t^2}\partial_\theta^2 v + \lambda f(t)\mathcal{N}(v) \tag{36}$$

を満たす. ここで, $\partial_t v$, $\partial_\theta^2 v$ を正当化するために軟化子の例であるポアソン核 $P_r(\theta) = (2\pi)^{-1}\sum_{j\in\mathbf{Z}} r^{|j|}e^{ij\theta}$ $(0 < r < 1)$ を用いた議論を行った. 以下でもこのような議論がその都度必要となるが, 本稿では証明の簡略化のために省略する. また, パーセヴァルの等式より

$$\|\{A_j(t)\}\|_{\ell_0^2} = (2\pi)^{-1/2}\|v(t)\|_{L^2},$$
$$\|\{jA_j(t)\}\|_{\ell_0^2} = (2\pi)^{-1/2}\|\partial_\theta v(t)\|_{L^2}$$

が成り立つ. よって $\{A_j(t)\}$ の大域性を調べるためには $\|v(t)\|_{H^1}^2 (= \|v(t)\|_{L^2}^2 + \|\partial_\theta v(t)\|_{L^2}^2 = 2\pi\|\{A_j(t)\}\|_{\ell_1^2}^2)$ を考えれば十分である.

さて, (36) の両辺に $\overline{v}$ を掛けて $\mathbf{T}$ 上で積分し, さらにその両辺の虚部を取ることにより,

$$\frac{d}{dt}\|v(t)\|_{L^2}^2 = 2(\mathrm{Im}\lambda)f(t)\|v(t)\|_{L^{p+1}}^{p+1}. \tag{37}$$

を得る. また, (36) の両辺を θ について偏微分してから両辺に $\overline{\partial_\theta v}$ を掛けて $\mathbf{T}$ 上で積分し, その両辺の虚部を取ることで次も得られる:

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\|\partial_\theta v(t)\|_{L^2}^2 \\ &\quad = 2f(t)\mathrm{Im}\big(\lambda\langle\partial_\theta\mathcal{N}(v(t)),\partial_\theta v(t)\rangle_\theta\big).\end{aligned} \tag{38}$$

それでは以下で定理 2-(i) および (ii) を示す.

定理 2-(i) の証明. 背理法にて証明する. そこで, 結論が成り立たないと仮定する, すなわち, 任意の $t \ge 0$ に対して $\|\{A_j(t)\}\|_{\ell_1^2} < \infty$ とする. この仮定のもとで矛盾を導く. まず, ヘルダーの不等式より $\|v\|_{L^{p+1}}^{p+1} \ge (2\pi)^{-(p-1)/2}\|v\|_{L^2}^{p+1}$ が成り立つことに注意する. これより (37) と主張における仮定 $\mathrm{Im}\lambda > 0$ より

$$\frac{d}{dt}\|v(t)\|_{L^2}^2 \ge 2(2\pi)^{-(p-1)/2}(\mathrm{Im}\lambda)f(t)\|v(t)\|_{L^2}^{p+1}$$

を得る. よって

$$\|v(t)\|_{L^2}^{p-1} \ge \frac{\|v(0)\|_{L^2}^{p-1}}{F_0(t)} \tag{39}$$

となる, ただし $F_0\colon [0,\infty) \to \mathbf{R}$ を

$$F_0(t) = 1 - (p-1)(\mathrm{Im}\lambda)\|\{\mu_j\}\|_{\ell_0^2}^{p-1}\int_0^t f(\tau)\,d\tau$$

とした (F_0 は連続関数である). ここで $\mathrm{Im}\lambda > 0$ より F_0 は単調減少であり, また $\int_0^\infty f(t)\,dt = \infty$ より $\mathcal{R}(F_0) = (-\infty,1]$ である. よって中間値の定理から $F_0(T^*) = 0$ となる $T^* > 0$ が存在する. これより

$$\lim_{t\to T^*-0}\|v(t)\|_{L^2} = \infty$$

が成り立つ. ところがこれは, 任意の $t \ge 0$ に対して $\|v(t)\|_{L^2} \le C\|\{A_j(t)\}\|_{\ell_0^2} \le C\|\{A_j(t)\}\|_{\ell_1^2} < \infty$ となることに矛盾する (最後の不等式が仮定である). よって (i) が示された.

定理 2-(iia) の証明. (i) の証明と同じように背理法により示す. 任意の $t \ge 0$ に対して $\|\{A_j(t)\}\|_{\ell_1^2} < \infty$ とする. このとき (39) を得る. ここで $\mathrm{Im}\lambda > 0$ より F_0 は単調減少であり, また $\|\{\mu_j\}\|_{\ell_0^2} > \varepsilon_0$ より $\mathcal{R}(F_0)\cap(-\infty,0) \ne \emptyset$ である. よって中間値の定理から $F_0(T^*) = 0$ となる $T^* > 0$ が存在する. あとは (i) の証明と同じようにして矛盾が導かれる. よって (iia) が示された.

定理 2-(iib) の証明. $\|v(t)\|_{H^1}^2 (= 2\pi\|\{A_j(t)\}\|_{\ell_1^2}^2)$ をア・プリオリ評価する. ガリアルド・ニレンベルグの不等式 (6)–(7), シュワルツの不等式, さらに (28) を (37) と (38) に適用すると,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\|v\|_{L^2}^2 &\le 2(\mathrm{Im}\lambda)f(t)\gamma_{p+1}^{p+1}\|v\|_{L^2}^{(p+3)/2}\|v\|_{H^1}^{(p-1)/2}\\ &\le 2C_1 f(t)\|v\|_{H^1}^{p+1},\\ \frac{d}{dt}\|\partial_\theta v\|_{L^2}^2 &\le 2f(t)|\lambda|\|\partial_\theta\mathcal{N}(v)\|_{L^2}\|\partial_\theta v\|_{L^2}\\ &\le 2f(t)|\lambda|p\|v\|_{L^\infty}^{p-1}\|\partial_\theta v\|_{L^2}\|\partial_\theta v\|_{L^2}\\ &\le 2f(t)|\lambda|p\gamma_\infty^{p-1}\|v\|_{L^2}^{(p-1)/2}\|v\|_{H^1}^{((p-1)/2)+2}\\ &\le 2C_2 f(t)\|v\|_{H^1}^{p+1},\end{aligned}$$

を得る, ただし C_1 と C_2 は正定数で (5) で定められたものである. これより

$$\frac{d}{dt}\|v\|_{H^1}^2 \le 2C_0 f(t)\|v\|_{H^1}^{p+1}$$

を得る, ただし $C_0 = C_1 + C_2$ である. 故に

$$\|v(t)\|_{H^1}^{p-1} \le \frac{\|v(0)\|_{H^1}^{p-1}}{F_1(t)} \tag{40}$$

が成り立つ, ただし $F_1\colon [0,\infty) \to \mathbf{R}$ を

$$F_1(t) = 1 - (2\pi)^{(p-1)/2}(p-1)C_0\|\{\mu_j\}\|_{\ell^2_1}^{p-1}\int_0^t f(\tau)\,d\tau$$

とした. よって $\lim_{t\to\infty} F_1(t) \geq 0$ すなわち $\|\{\mu_j\}\|_{\ell^2_1} \leq \varepsilon_1$ であるとき, $\{A_j(t)\} \in C([0,\infty);\ell^2_1) \cap C^1((0,\infty);\ell^2_1)$ となる.

さらに $\|\{\mu_j\}\|_{\ell^2_1} < \varepsilon_1$ の場合を考える. このとき, (40) より, ある定数 $C > 0$ が存在して任意の $t \geq 0$ に対し $\|\{A_j(t)\}\|_{\ell^2_1} = (2\pi)^{-1/2}\|v(t)\|_{H^1} < C$ が成り立つ. ここで

$$\{\nu_j\} := \{\mu_j\} - i\lambda\int_0^\infty f(\tau)\{\widetilde{A}_j(\tau)\}\,d\tau.$$

とおく. なお, この右辺第 2 項の広義積分は補題 5 の (22) より ℓ^2_1 の意味で収束することに注意する. これより $\{\nu_j\} \in \ell^2_1$ である. また, 再び (22) より

$$\begin{aligned}
&\|\{A_j(t)\} - \{\nu_j\}\|_{\ell^2_1} \\
&\leq C\|\{A_j(t)\}\|^p_{L^\infty(0,\infty;\ell^2_1)}\int_t^\infty f(\tau)\,d\tau \\
&\leq C\int_t^\infty f(\tau)\,d\tau \longrightarrow 0 \quad (t \to \infty)
\end{aligned}$$

を得る. よって (iib) が示された.

以上で定理 2 が示された. □

参考文献

[1] G. P. Agrawal, Nonlinear Fiber Optics (2nd ed.), Academic Press, 1995.

[2] V. Banica, and L. Vega, On the Dirac delta as initial condition for nonlinear Schrödinger equations, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **25** (2008), 697–711.

[3] K. Doi, On the damped nonlinear Schrödinger equation with delta functions as initial data, J. Math. Kyoto Univ. **48** (2008), 363–372.

[4] G. Fibich, Self-focusing in the damped nonlinear Schrödinger equation, SIAM J. Appl. Math. **61** (2001), 1680–1705.

[5] O. Goubet, Asymptotic smoothing effect for a weakly damped nonlinear Schrödinger equation in $\mathbf{T}^2$, J. Differential Equations **165** (2000), 96–122.

[6] C. E. Kenig, G. Ponce, and L. Vega, On the ill-posedness of some canonical dispersive equations, Duke Math. J. **106** (2001), 617–633.

[7] N. Kita, Mode generating property of solutions to the nonlinear Schrödinger equations in one space dimension, in *Nonlinear dispersive equations*. Ozawa, T. and Tsutsumi, Y. (Eds.), GAKUTO Internat. Ser. Math. Sci. Appl. 26, Gakkōtosho, Tokyo, 2006, 111–128.

[8] ——, Nonlinear Schrödinger equations with δ-functions as initial data, to appear in Math. Z.

[9] G. Moebs, and R. Temam, Resolution of a stochastic weakly damped nonlinear Schrödinger equation by a multilevel numerical method, J. Opt. Soc. Amer. A **17** (2000), 1870–1879.

[10] T. Ozawa, and Y. Yamazaki, Life-span of smooth solutions of the complex Ginzburg-Landau type equation on a torus, Nonlinearity **16** (2003), 2029–2034.

[11] K. Sasaki, and R. Ohya, Solitary-wave solutions of a forced nonlinear Schrödinger equation with damping, J. Phys. Soc. Japan **63** (1994), 493–499.

[12] M. Tsutsumi, Nonexistence of global solutions to the Cauchy problem for the damped nonlinear Schrödinger equations, SIAM J. Math. Anal. **15** (1984), 357–366.

[13] J. Zhang, On the finite-time behaviour for nonlinear Schrödinger equations, Comm. Math. Phys. **162** (1994), 249–260.

On Nonlinear Schrödinger Equations with Time-Dependent Dissipation Involving Delta Functions as Initial Data

Kazuyuki DOI
Department of Liberal Arts and Sciences, Faculty of Engineering

Summary

In this paper, we consider the Cauchy problem for nonlinear Schrödinger equations with time-dependent dissipation and superposed delta functions as initial data. The aim of this paper is to study the influence of nonlinearity and damping (absorption) on the solution. The case where the nonlinearity makes the solution unstable is of special interest, because the dissipative nature from the damping comes into play in this case.

Key Words: nonlinear Schrödinger equations, time-dependent dissipation, delta functions, global solutions, blow-up solutions