Korteweg-de Vries 方程式に対する
エネルギーの保存する4次の差分スキーム

石森　勇次

（工学部一般教育等）

Korteweg-de Vries 方程式に対して，エネルギー関数の値が厳密に保存することを保証するような差分スキームを構成する。スキームの打ち切り誤差は4次である。この差分スキームの構成方法は，汎関数微分で表される他の非線形波動方程式に対しても適用可能である。

キーワード：差分法，4次の精度，エネルギー保存，非線形波動方程式

1　はじめに

エネルギーを厳密に保存させるような差分法は，単純な差分法で見られる打ち切り誤差による見かけの励起や減衰を引き起こさない点で優れている。本研究では，従属変数 u が1個の空間変数 x と時間変数 t に依存する Korteweg-de Vries (KdV) 方程式[1]

$$\frac{\partial u}{\partial t}+6u\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}=0 \tag{1}$$

に対する差分法を考える。KdV 方程式に対するエネルギーの保存する差分法はすでに降旗と森[2]によって提案されているが，それは打ち切り誤差が2次のスキームである。ここではさらに精度のよい4次の差分法を提案する。ところで，偏微分方程式で記述される系の差分法を構成するとき，境界条件を決めておかなければいけない。ここでは，最も簡単な周期的境界条件

$$u(x+L,t)=u(x,t) \tag{2}$$

で考えることにする。L は系の長さである。

さて，KdV 方程式がエネルギー保存則を満たすことは次のように示される。エネルギー汎関数 H を

$$H=\int_0^L \mathscr{H}dx,\quad \mathscr{H}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2-u^3 \tag{3}$$

とすると KdV 方程式(1)は

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\frac{\delta\mathscr{H}}{\delta u} \tag{4}$$

$$\frac{\delta}{\delta u}=\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\frac{\partial^j u}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial u_{jx}},\quad u_{jx}=\frac{\partial^j u}{\partial x^j} \tag{5}$$

のように書ける。従って，

$$\frac{dH}{dt}=\int_0^L\frac{\delta\mathscr{H}}{\delta u}\frac{\partial u}{\partial t}dx=\int_0^L\frac{\delta\mathscr{H}}{\delta u}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\delta\mathscr{H}}{\delta u}dx$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^L\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\delta\mathscr{H}}{\delta u}\right)^2dx=0 \tag{6}$$

即ち，エネルギーは保存する。

差分法の構成の手順を述べると，まず空間変数の離散化

$$x_m=m\Delta x\quad(m=0,1,2,\cdots,N) \tag{7}$$

によって偏微分方程式を

$$u_m(t)=u(x_m,t) \tag{8}$$

に対する常微分方程式で近似する。次に時間変数の離散化

$$t^k=k\Delta t\quad(k=0,1,2,\cdots) \tag{9}$$

によって常微分方程式を

$$u_m^k=u_m(t^k) \tag{10}$$

に対する差分方程式で近似することによって差分スキームは構成される。ここで，Δx 及び Δt は空間及び時間の刻み幅である。また，k が半整数のときの u_m^k が補助的に使われる。このように，通常の偏微分方程式の差分スキームの構成法のように空間も時間も一度に離散化せず，順に考えることにする。その際，連続時間系のエネルギー保存則の離散化が考慮される。2

節で詳しく差分スキームの構成について述べ，３節では，実際の数値計算例を述べ，エネルギーの保存する２次の差分法と比較する。

2　差分スキームの構成

2.1　空間変数の離散化

ここでは，空間変数の離散化を考える。このとき，離散化による誤差が $O(\Delta x^4)$ となるようにする。通常は偏微分方程式の離散化を直接考えるのであるが，ここではエネルギー保存則を考慮するために，エネルギー汎関数の離散化から出発する。

まず，積分を和で置き換えることを行う。そこでEuler-Maclaurinの公式[3]

$$\sum_{m=0}^{N-1}\mathscr{H}(m\Delta x)\Delta x$$

$$=\int_0^L \mathscr{H}(x)\,dx-\frac{\Delta x}{2}\{\mathscr{H}(L)-\mathscr{H}(0)\}$$

$$+\frac{\Delta x^2}{12}\left\{\frac{\partial\mathscr{H}(L)}{\partial x}-\frac{\partial\mathscr{H}(0)}{\partial x}\right\}+O(\Delta x^4) \tag{11}$$

に注目する。少なくとも u の x に関する２次の偏導関数までは周期的であると仮定すると，積分を和に置き換えても誤差は $O(\Delta x^4)$ である。エネルギー密度関数 $\mathscr{H}$ には，偏導関数が含まれるので，空間微分の差分化を次に考える。３点の差分微分を近似すればよいことがわかる。いま，

$$\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}} \tag{12}$$

$$r_1=\alpha+\frac{1}{2},\quad r_2=2\alpha,\quad r_3=\alpha-\frac{1}{2} \tag{13}$$

とすると

$$\left(\frac{r_1u_{m+1}-r_2u_m+r_3u_{m-1}}{\Delta x}\right)^2$$

$$=\left\{\frac{\partial u}{\partial x}+\alpha\Delta x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\Delta x^2}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}+\frac{\alpha\Delta x^3}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}+O(\Delta x^4)\right\}^2$$

$$=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\alpha\Delta x\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\frac{\Delta x^2}{3}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)$$

$$+\frac{\alpha\Delta x^3}{6}\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2\right\}+O(\Delta x^4) \tag{14}$$

となる。この３点の差分近似そのものは誤差が $O(\Delta x)$ であるが，エネルギーはこれを積分したものなので，u の３次の偏導関数まで周期的であれば，エネルギー積分としては誤差が $O(\Delta x^4)$ となる。結局エネルギー関数は空間変数の離散化によって次のように書かれる。

$$H=\sum_{m=0}^{N-1}\mathscr{H}_m\Delta x+O(\Delta x^4) \tag{15}$$

$$\mathscr{H}_m=\frac{1}{2}\left(\frac{r_1u_{m+1}-r_2u_m+r_3u_{m-1}}{\Delta x}\right)^2-u_m^3 \tag{16}$$

この離散化されたエネルギー関数によって偏微分方程式(4)は常微分方程式に近似される。

$$\bar{\mathscr{H}}=\sum_{m=0}^{N-1}\mathscr{H}_m \tag{17}$$

$$\frac{\delta\mathscr{H}}{\delta u}=\frac{\partial\bar{\mathscr{H}}}{\partial u_m}+O(\Delta x^4)=\partial_m\bar{\mathscr{H}}+O(\Delta x^4) \tag{18}$$

及び５点公式

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{-f_{m+2}+8f_{m+1}-8f_{m-1}+f_{m-2}}{12\Delta x}+O(\Delta x^4) \tag{19}$$

より，常微分方程式は次式で与えられる。

$$\frac{du_m}{dt}=\frac{1}{12\Delta x}(-\partial_{m+2}+8\partial_{m+1}-8\partial_{m-1}+\partial_{m-2})\bar{\mathscr{H}} \tag{20}$$

ここで

$$\partial_m\bar{\mathscr{H}}=\frac{1}{12\Delta x^2}\times$$

$$(u_{m+2}-16u_{m+1}+30u_m-16u_{m-1}+u_{m-2})-3u_m^2 \tag{21}$$

である。

エネルギー保存則(6)の離散化は次のようになる。

$$\frac{d\bar{\mathscr{H}}}{dt}=\sum_{m=0}^{N-1}(\partial_m\bar{\mathscr{H}})\frac{du_m}{dt}$$

$$=\frac{1}{12\Delta x}\sum_{m=0}^{N-1}(\partial_m\bar{\mathscr{H}})$$

$$\times(-\partial_{m+2}+8\partial_{m+1}-8\partial_{m-1}+\partial_{m-2})\bar{\mathscr{H}}$$

$$=\frac{1}{12\Delta x}\sum_{m=0}^{N-1}(J_{m+1}-J_m)=0 \tag{22}$$

$$J_m=8(\partial_m\bar{\mathscr{H}})(\partial_{m-1}\bar{\mathscr{H}})-(\partial_{m+1}\bar{\mathscr{H}})(\partial_{m-1}\bar{\mathscr{H}})$$

$$-(\partial_m\bar{\mathscr{H}})(\partial_{m-2}\bar{\mathscr{H}}) \tag{23}$$

即ち，連続系のエネルギー H と誤差が $O(\Delta x^4)$ である空間変数離散化のエネルギー $\bar{\mathscr{H}}\Delta x$ は密度に保存する。

2.2　時間変数の離散化(差分スキーム)

時間変数の離散化によって差分スキームを構成しよう。偏微分方程式は常微分方程式となったので N 変数の力学系とみなされる。多変数の勾配系[4]などですでに差分スキームの構成方法は提案ずみなので，ここでもその方法をそのまま使うことにする。即ち，時間変数の離散化は微分方程式

$$\frac{du_m}{dt}=F \tag{24}$$

の積分表示

$$u_m^{k+1} = u_m^k + \int_{t^k}^{t^{k+1}} F dt \tag{25}$$

の離散化を意味する。ここでは，(20)(21)式より F は空間の点で表される関数

$$F = F(u_{m-4}, u_{m-3}, \cdots, u_{m+4}) \tag{26}$$

である。誤差(global discretization error)が $O(\Delta t^4)$（積分の局所的な誤差は $O(\Delta t^5)$）となるには，半整数ステップでの値も必要であるが，これは

$$u_m^{k+1/2} = \frac{1}{2}(u_m^k + u_m^{k+1}) + \frac{1}{2}\left(\int_{t^k}^{t^{k+1/2}} F dt - \int_{t^{k+1/2}}^{t^{k+1}} F dt\right) \tag{27}$$

の離散化を考えることにより与える。時間方向に3点，空間方向に9点，合計27点の差分スキームになる。

F は $\partial_m \bar{\mathscr{H}}$ のタイプの関数の和であり，積分の離散化(数値積分)は次のようになる。

$$\int_{t^k}^{t^{k+1}} \partial_m \bar{\mathscr{H}} dt$$

$$= \frac{\Delta t}{3}(2\delta_m^{1,1/2}\bar{\mu}_m^{1,1/2} + 2\delta_m^{1/2,0}\bar{\mu}_m^{1/2,0} - \delta_m^{1,0}\bar{\mu}_m^{1,0})\bar{\mathscr{H}}^k + O(\Delta t^5) \tag{28}$$

$$\int_{t^{k+1/2}}^{t^{k+1}} \partial_m \bar{\mathscr{H}} dt - \int_{t^k}^{t^{k+1/2}} \partial_m \bar{\mathscr{H}} dt$$

$$= \frac{\Delta t}{2}(\delta_m^{1,1/2}\bar{\mu}_m^{1,1/2} - \delta_m^{1/2,0}\bar{\mu}_m^{1/2,0})\bar{\mathscr{H}}^k + O(\Delta t^4) \tag{29}$$

ここで，$\delta_m^{a,b}$ 及び $\bar{\mu}_m^{a,b}$ はそれぞれ差分商演算子及び平均化演算子である。これらは，シフト演算子 E_m^a

$$E_m^a G(u_1^k, u_2^k, \cdots, u_N^k) = G(\cdots, u_{m-1}^k, u_m^{k+a}, u_{m+1}^k, \cdots) \tag{30}$$

によって次のように定義される。

$$\delta_m^{a,b} G^k = \frac{(E_m^a - E_m^b) G^k}{(E_m^a - E_m^b) u_m^k}, \quad G^k = G(u_1^k, u_2^k, \cdots, u_N^k) \tag{31}$$

$$\bar{\mu}_m^{a,b} G^k = \mu_{1,\cdots,m-1,m+1\cdots,N}^{a,b} G^k \tag{32}$$

$$= M^{a,b}(E_1, \cdots, E_{m-1}, E_{m+1}, \cdots, E_N) G^k$$

$$M^{a,b}(E_1, \cdots, E_{m-1}, E_{m+1}, \cdots, E_N)$$

$$= \frac{1}{N!}\sum_{j=1}^{N} \mathrm{per} \begin{bmatrix} E_1^a & \cdots & E_1^a & E_1^b & \cdots & E_1^b \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ E_{m-1}^a & \cdots & E_{m-1}^a & E_{m-1}^b & \cdots & E_{m-1}^b \\ E_{m+1}^a & \cdots & E_{m+1}^a & E_{m+1}^b & \cdots & E_{m+1}^b \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \underbrace{E_N^a \quad \cdots \quad E_N^a}_{N-j} & & & \underbrace{E_N^b \quad \cdots \quad E_N^b}_{j-1} & & \end{bmatrix} \tag{33}$$

per は行列のパーマネントを表す。例えば，

$$M^{a,b}(E_1) = \frac{1}{2}(E_1^a + E_1^b) \tag{34}$$

$$M^{a,b}(E_1, E_2) = \frac{1}{6}(2E_1^a E_2^a + E_1^a E_2^b + E_1^b E_2^a + 2E_1^b E_2^b) \tag{35}$$

等となる。

半整数ステップでの値を計算するための積分公式(29)の誤差が $O(\Delta t^4)$ となっているが，半整数ステップの値は次のステップでは使われていないのでこれにより精度が悪くなることはない。精度については，後で証明することにする。

結局公式(28)(29)により差分スキームは次のようになる。

$$u_m^{k+1} = u_m^k + \frac{1}{12\Delta x} \times \frac{\Delta t}{3} \times$$

$$[-(2\delta_{m+2}^{1,1/2}\bar{\mu}_{m+2}^{1,1/2} + 2\delta_{m+2}^{1/2,0}\bar{\mu}_{m+2}^{1/2,0} - \delta_{m+2}^{1,0}\bar{\mu}_{m+2}^{1,0})$$

$$+8(2\delta_{m+1}^{1,1/2}\bar{\mu}_{m+1}^{1,1/2} + 2\delta_{m+1}^{1/2,0}\bar{\mu}_{m+1}^{1/2,0} - \delta_{m+1}^{1,0}\bar{\mu}_{m+1}^{1,0})$$

$$-8(2\delta_{m-1}^{1,1/2}\bar{\mu}_{m-1}^{1,1/2} + 2\delta_{m-1}^{1/2,0}\bar{\mu}_{m-1}^{1/2,0} - \delta_{m-1}^{1,0}\bar{\mu}_{m-1}^{1,0})$$

$$+(2\delta_{m-2}^{1,1/2}\bar{\mu}_{m-2}^{1,1/2} + 2\delta_{m-2}^{1/2,0}\bar{\mu}_{m-2}^{1/2,0} - \delta_{m-2}^{1,0}\bar{\mu}_{m-2}^{1,0})]\bar{\mathscr{H}}^k \tag{36}$$

$$u_m^{k+1/2} = \frac{1}{2}(u_m^k + u_m^{k+1}) - \frac{1}{12\Delta x} \times \frac{\Delta t}{4} \times$$

$$[-(\delta_{m+2}^{1,1/2}\bar{\mu}_{m+2}^{1,1/2} - \delta_{m+2}^{1/2,0}\bar{\mu}_{m+2}^{1/2,0})$$

$$+8(\delta_{m+1}^{1,1/2}\bar{\mu}_{m+1}^{1,1/2} - \delta_{m+1}^{1/2,0}\bar{\mu}_{m+1}^{1/2,0})$$

$$-8(\delta_{m-1}^{1,1/2}\bar{\mu}_{m-1}^{1,1/2} - \delta_{m-1}^{1/2,0}\bar{\mu}_{m-1}^{1/2,0})$$

$$+(\delta_{m-2}^{1,1/2}\bar{\mu}_{m-2}^{1,1/2} - \delta_{m-2}^{1/2,0}\bar{\mu}_{m-2}^{1/2,0})] \times \bar{\mathscr{H}}^k \tag{37}$$

ここで，

$$\delta_m^{a,b}\bar{\mu}_m^{a,b}\bar{\mathscr{H}}^k = \frac{1}{24\Delta x^2} \times$$

$$[(u_{m+2}^{k+a} + u_{m+2}^{k+b}) - 16(u_{m+1}^{k+a} + u_{m+1}^{k+b})$$

$$+30(u_m^{k+a} + u_m^{k+b}) - 16(u_{m-1}^{k+a} + u_{m-1}^{k+b}) + (u_{m-2}^{k+a} + u_{m-2}^{k+b})]$$

$$-[(u_m^{k+a})^2 + u_m^{k+a}u_m^{k+b} + (u_m^{k+b})^2] \tag{38}$$

である。

差分スキーム(36)(37)に対してエネルギー保存則が成り立つことは，恒等式[4]

$$\bar{\mathscr{H}}^{k+1} - \bar{\mathscr{H}}^k$$

$$= \frac{1}{3}\sum_{m=0}^{N-1}[(2\delta_m^{1,1/2}\bar{\mu}_m^{1,1/2} + 2\delta_m^{1/2,0}\bar{\mu}_m^{1/2,0} - \delta_m^{1,0}\bar{\mu}_m^{0,0})\bar{\mathscr{H}}^k](u_m^{k+1} - u_m^k)$$

$$+ \frac{2}{3}\sum_{m=0}^{N-1}[(\delta_m^{1,1/2}\bar{\mu}_m^{1,1/2} - \delta_m^{1/2,0}\bar{\mu}_m^{1/2,0})\bar{\mathscr{H}}^k](u_m^{k+1} - 2u_m^{k+1/2} + u_m^k) \tag{39}$$

より容易にわかる。なぜなら，前半と後半の和において，置き換え

$$2\delta_m^{1,1/2}\bar{\mu}_m^{1,1/2}+2\delta_m^{1/2,0}\bar{\mu}_m^{1/2,0}-\delta_m^{1,0}\bar{\mu}_m^{1,0}\Rightarrow\partial_m\bar{\mathscr{H}} \tag{40}$$

$$\delta_m^{1,1/2}\bar{\mu}_m^{1,1/2}-\delta_m^{1/2,0}\bar{\mu}_m^{1/2,0}\Rightarrow\partial_m\bar{\mathscr{H}} \tag{41}$$

をしてみるなら，空間変数離散化の保存則(22)と同様に

$$\bar{\mathscr{H}}^{k+1}-\bar{\mathscr{H}}^k=0 \tag{42}$$

となることは明らかだからである。

2.3 精　度

まず(28)式が成り立つことを示す。証明は $m=N$ のときを考えれば十分である。Simpson の公式[3]

$$\int_{t^k}^{t^{k+1}}\partial_N\bar{\mathscr{H}}dt$$

$$=\frac{\Delta t}{6}(\partial_N\bar{\mathscr{H}}^k+4\partial_N\bar{\mathscr{H}}^{k+1/2}+\partial_N\bar{\mathscr{H}}^{k+1})+O(\Delta t^5) \tag{43}$$

との差が $O(\Delta t^5)$ であることを示すことによって証明する。

次のように展開する。

$$\begin{aligned}
&\frac{\Delta t}{6}(\partial_N\bar{\mathscr{H}}^k+4\partial_N\bar{\mathscr{H}}^{k+1/2}+\partial_N\bar{\mathscr{H}}^{k+1})\\
&=\frac{\Delta t}{6}(1+4E_1^{1/2}\cdots E_{N-1}^{1/2}+E^1\cdots E_{N-1}^1)\partial_N\bar{\mathscr{H}}^k\\
&\quad+\frac{\Delta t^2\dot{u}_N^k}{6}(2E_1^{1/2}\cdots E_{N-1}^{1/2}+E_1^1\cdots E_{N-1}^1)\partial_N^2\bar{\mathscr{H}}^k\\
&\quad+\frac{\Delta t^3\ddot{u}_N^k}{12}(E_1^{1/2}\cdots E_{N-1}^{1/2}+E_1^1\cdots E_{N-1}^1)\partial_N^2\bar{\mathscr{H}}^k\\
&\quad+\frac{\Delta t^3(\dot{u}_N^k)^2}{12}(E_1^{1/2}\cdots E_{N-1}^{1/2}+E_1^1\cdots E_{N-1}^1)\partial_N^3\bar{\mathscr{H}}^k\\
&\quad+\frac{\Delta t^4\dddot{u}_N^k}{72}(E_1^{1/2}\cdots E_{N-1}^{1/2}+2E_1^1\cdots E_{N-1}^1)\partial_N^2\bar{\mathscr{H}}^k\\
&\quad+\frac{\Delta t^4\dot{u}_N^k\ddot{u}_N^k}{24}(E_1^{1/2}\cdots E_{N-1}^{1/2}+2E_1^1\cdots E_{N-1}^1)\partial_N^3\bar{\mathscr{H}}^k\\
&\quad+\frac{\Delta t^4(\dot{u}_N^k)^3}{12}(E_1^{1/2}\cdots E_{N-1}^{1/2}+2E_1^1\cdots E_{N-1}^1)\partial_N^4\bar{\mathscr{H}}^k\\
&\quad+O(\Delta t^5)
\end{aligned} \tag{44}$$

一方，差分公式(28)は

$$\begin{aligned}
&\frac{\Delta t}{3}(2\delta_N^{1,1/2}\bar{\mu}_N^{1,1/2}+2\delta_N^{1/2,0}\bar{\mu}_N^{1/2,0}-\delta_N^{1,0}\bar{\mu}_N^{1,0})\bar{\mathscr{H}}^k\\
&=\frac{\Delta t}{3}\{2M^{1,1/2}(E_1,\cdots,E_{N-1})+2M^{1/2,0}(E_1,\cdots,E_{N-1})\\
&\quad-M^{1,0}(E_1,\cdots,E_{N-1})\}\partial_N\bar{\mathscr{H}}^k\\
&\quad+\frac{\Delta t^2\dot{u}_N^k}{6}\{3M^{1,1/2}(E_1,\cdots,E_{N-1})+M^{1/2,0}(E_1,\cdots,E_{N-1})\\
&\quad-M^{1,0}(E_1,\cdots,E_{N-1})\}\partial_N^2\bar{\mathscr{H}}^k\\
&\quad+\frac{\Delta t^3\ddot{u}_N^k}{24}\{5M^{1,1/2}(E_1,\cdots,E_{N-1})+M^{1/2,0}(E_1,\cdots,E_{N-1})\\
&\quad-2M^{1,0}(E_1,\cdots,E_{N-1})\}\partial_N^2\bar{\mathscr{H}}^k\\
&\quad+\frac{\Delta t^3(\dot{u}_N^k)^2}{36}\{7M^{1,1/2}(E_1,\cdots,E_{N-1})+M^{1/2,0}(E_1,\cdots,E_{N-1})\\
&\quad-2M^{1,0}(E_1,\cdots,E_{N-1})\}\partial_N^3\bar{\mathscr{H}}^k\\
&\quad+\frac{\Delta t^4\dddot{u}_N^k}{144}\{9M^{1,1/2}(E_1,\cdots,E_{N-1})+M^{1/2,0}(E_1,\cdots,E_{N-1})\\
&\quad-4M^{1,0}(E_1,\cdots,E_{N-1})\}\partial_N^2\bar{\mathscr{H}}^k\\
&\quad+\frac{\Delta t^4\dot{u}_N^k\ddot{u}_N^k}{72}\{12M^{1,1/2}(E_1,\cdots,E_{N-1})+M^{1/2,0}(E_1,\cdots,E_{N-1})\\
&\quad-4M^{1,0}(E_1,\cdots,E_{N-1})\}\partial_N^3\bar{\mathscr{H}}^k\\
&\quad+\frac{\Delta t^4(\dot{u}_N^k)^3}{288}\{15M^{1,1/2}(E_1,\cdots,E_{N-1})+M^{1/2,0}(E_1,\cdots,E_{N-1})\\
&\quad-4M^{1,0}(E_1,\cdots,E_{N-1})\}\partial_N^4\bar{\mathscr{H}}^k+O(\Delta t^5)
\end{aligned} \tag{45}$$

となる。ここで

$$\Delta_m^a=E_m^a-1=O(\Delta t) \tag{46}$$

とおき

$$\begin{aligned}
&E_1^a\cdots E_{N-1}^a\\
&=1+\sum_{m=1}^{N-1}\Delta_m^a+\sum_{m=1}^{N-2}\sum_{n=m+1}^{N-1}\Delta_m^a\Delta_n^a\\
&\quad+\sum_{m=1}^{N-3}\sum_{n=m+1}^{N-2}\sum_{j=n+1}^{N-1}\Delta_m^a\Delta_n^a\Delta_j^a+O(\Delta t^4)
\end{aligned} \tag{47}$$

及び

$$\begin{aligned}
&M^{a,b}(E_1\cdots E_{N-1})\\
&=1+\sum_{m=1}^{N-1}M^{a,b}(\Delta_m)+\sum_{m=1}^{N-2}\sum_{n=m+1}^{N-1}M^{a,b}(\Delta_m,\Delta_n)\\
&\quad+\sum_{m=1}^{N-3}\sum_{n=m+1}^{N-2}\sum_{j=n+1}^{N-1}M^{a,b}(\Delta_m,\Delta_n,\Delta_j)+O(\Delta t^4)
\end{aligned} \tag{48}$$

に注意すると(44)式と(45)式の差は $O(\Delta t^5)$ であることが示される。

(29)式が成り立つことは次のように示される。差分公式の展開式

$$\begin{aligned}
&(a-b)\Delta t\delta_N^{a,b}\bar{\mu}_N^{a,b}\bar{\mathscr{H}}^k\\
&=(a-b)\Delta t\Big[\Big\{1+\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{N-1}(\Delta_m^a+\Delta_m^b)\Big\}\partial_N\bar{\mathscr{H}}^k\\
&\quad+\frac{1}{2}(u_N^{k+a}+u_N^{k+b}-2u_N^k)\partial_N^2\bar{\mathscr{H}}^k\Big]+O(\Delta t^3)
\end{aligned} \tag{49}$$

及び台形公式の展開式

$$\begin{aligned}
&\frac{(a-b)\Delta t}{2}(\partial_N\bar{\mathscr{H}}^{k+a}+\partial_N\bar{\mathscr{H}}^{k+b})\\
&=(a-b)\Delta t\Big[\Big\{1+\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{N-1}(\Delta_m^a+\Delta_m^b)\Big\}\partial_N\bar{\mathscr{H}}^k\\
&\quad+\frac{1}{2}(u_N^{k+a}+u_N^{k+b}-2u_N^k)\partial_N^2\bar{\mathscr{H}}^k\Big]+O(\Delta t^3)
\end{aligned} \tag{50}$$

は Δt^2 まで一致する。(29)式は差分の形に成っているので3次の誤差の差分，即ち4次の誤差をもつことになる。

3　数値計算例

計算例として，きざみ幅や格子点の数を

$$\Delta x = 0.2, \quad \Delta t = 0.001 \tag{51}$$

$$N = 200, \quad L = 40 \tag{52}$$

とした場合を考える。初期条件として2個のソリトン

$$u(x, 0) = 2p_1^2 \mathrm{sech}^2\theta_1 + 2p_2^2 \mathrm{sech}^2\theta_2 \tag{53}$$

$$p_1 = 1, \quad p_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \tag{54}$$

$$\theta_1 = p_1\{x - x_1(0)\}, \quad x_1(0) = 30 \tag{55}$$

$$\theta_2 = p_2\{x - x_2(0)\}, \quad x_2(0) = 10 \tag{56}$$

を与え，それらが衝突するようすを計算する。これは周期的境界条件における2ソリトン解の厳密な初期値ではないが，ソリトン間の距離と境界とソリトンとの距離をある程度大きくとっているので $L=\infty$ の系における厳密な2ソリトン解との比較は可能である。数値計算の精度をみるために，エネルギー H のほかに2個の保存量

$$I_1 = \int_0^L u\,dx \tag{57}$$

$$I_2 = \int_0^L u^2 dx \tag{58}$$

と位相のずれ

$$\Delta_1 = \frac{1}{p_1}\log\left|\frac{p_1+p_2}{p_1-p_2}\right| = 1.76274\cdots \tag{59}$$

$$\Delta_2 = \frac{1}{p_2}\log\left|\frac{p_1-p_2}{p_1+p_2}\right| = -2.49290\cdots \tag{60}$$

を調べた。

図1で示された時空パターンはここで提案した差分スキームを使って計算した結果であり，2個のソリトンが衝突しているようす示している。表1は保存量と位相のずれを厳密な値と比較したものである。エネルギーの保存する差分法(EC4)と他の計算法，エネルギーの保存する2次の差分法(EC2)及び空間差分の誤差は本研究で述べた方法と同じ4次であるが時間発展はRunge-Kutta法(RK4)を用いた方法との比較もしている。アンダーラインは厳密な値と異なる部分であり，誤差を表している。

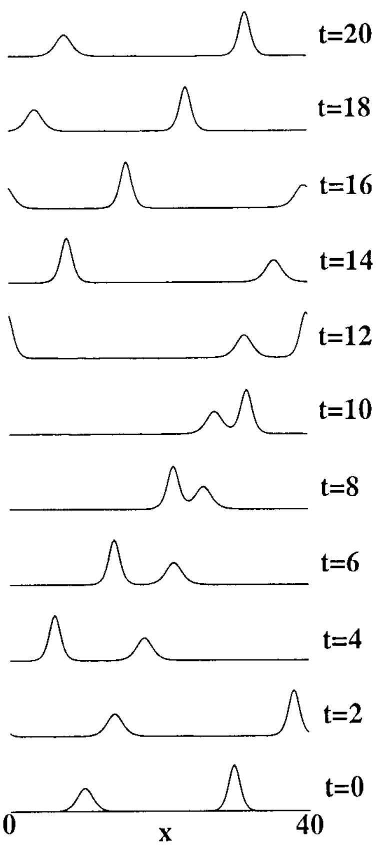

図1　数値解

エネルギーの初期値は空間差分の誤差により厳密な値と異なっており，当然EC2よりEC4やRK4の精度の方が良い。ソリトンの衝突後のエネルギーはどの計算方法でも，この表の桁では変化がみられない。I_1 と I_2 は，導関数を含んでいないので空間変数の離散化による誤差はないのであるが，初期値が厳密解ではなくソリトンどうしが無限に離れておらず系の大きさも無限大ではないのでソリトンの裾野の影響が少し出ている。どの計算法も I_1 は厳密に保存するのでソリトンの衝突後の値に変化はみられない。一方 I_2 はどの計算

表1　厳密解との比較

	厳密な値	EC4	EC2	RK4
H ($t=0$)	−7.531371	−7.531985	−7.553327	−7.531985
H ($t=20$)		−7.531985	−7.553327	−7.531985
I_1 ($t=0$)	6.828427	6.828425	6.828425	6.828425
I_1 ($t=20$)		6.828425	6.828425	6.828425
I_2 ($t=0$)	7.218951	7.218951	7.218951	7.218951
I_2 ($t=20$)		7.218952	7.219220	7.218952
Δ_1	1.763	1.752	1.402	1.754
Δ_2	−2.493	−2.497	−2.630	−2.496

法けも厳密に保存することはないので，離散化による誤差の影響が出ている。位相のずれにも誤差がみられる。いずれも４次のスキームが２次のスキームより正確である。

4　おわりに

本研究では KdV 方程式に対してエネルギーの保存する４次の差分スキームを提案した。この計算法は KdV 方程式に限らず(4)式のような汎関数微分で与えられる偏微分方程式であればどのような方程式に対しても適用可能である。しかし，KdV方程式に対する別の表現

$$\frac{\partial u}{\partial t}=-\left\{2\left(\frac{\partial}{\partial x}u+u\frac{\partial}{\partial x}\right)+\frac{\partial^3}{\partial x^3}\right\}\frac{\delta\mathscr{H}}{\delta u} \tag{61}$$

$$\mathscr{H}=\frac{1}{2}u^2 \tag{62}$$

のようなタイプに対して，いまのところ時間変数の離散化誤差が２次のスキームは構成できても４次のスキームはできていない。

数値計算例として２個のソリトンの衝突をみたが，２次のスキームより精度が良いことが示され，４次の Runge-Kutta 法との差はあまりみられなかった。長時間の挙動を調べれば，エネルギー保存の長所がみられると思われる。この点については，今後数値計算を行う予定である。

参考文献

[1] 渡辺慎介(1985)：ソリトン物理入門，培風館，pp. 25-49.

[2] 隆旗大介，森正武(1998)：偏微分方程式に対する差分スキームの離散的変分による統一的導出，日本応用数理学会論文誌，Vol. 8 pp. 317-340.

[3] 長嶋秀世(1994)：数値計算法，槙書店，p. 69.

[4] 石森勇次(1998)：多変数の勾配系に対するエネルギー不等式を満たす４次の差分法，富山県立大学紀要，第８巻 pp. 10-16.

An Energy-Conserving Difference Scheme of Fourth Order for the Korteweg-de Vries Equation

Yuji ISHIMORI

Department of Liberal Arts and Sciences, Faculty of Engineering

An energy conserving difference scheme for the Korteweg-de Vries equation is constructed that gives the fourth order of discretization errors. The method of constructing such scheme is applicable to other nonlinear wave equations which are given by the functional derivative.

Key Words: difference method, fourth order scheme, energy conservation, nonlinear partial differential equations