情報通信システムの性能解析と $M/G/1$ 待ち行列モデル

片山　勁・小林　香

(工学部電子情報工学科)

通信トラヒック理論 (*teletraffic theory*) の発祥は、約120年程前の電話の発明とその普及に伴って生じた通信トラヒック (通信呼の流れ) の混雑現象の解析までに遡ることが出来る．元来この理論は電話システム，通信交換システムの通話路網 (*switching network*) の解析と設計を容易にするために開発された．その後応用領域が広げられ，計算機システム，情報通信システム，生産システム，流通システム等における設備数，コストと性能，サービス品質(待ち時間，応答時間，待合せ率，呼損率等)の関係を解析，設計する待ち行列システム理論 (*queueing system theory*) として発展してきた．例えばコンピュータ・ネットワークのノードにおいて「客」は［パケット，トランザクション］,「窓口」はメッセージを伝える［通信回線，*CPU*］に対応する．これまでに最も研究の進められてきた待ち行列モデルの一つに，*Kendall* の表記法で $M/G/1$ と表される基本的なモデルがあり，以下にその待ち行列モデルとそれに関する重要なポラチェック・ヒンチンの公式 (*Pollaczek-Khintchine formula*) について最近の研究成果を含めて記述する．なお，本稿は日本オペレーションズ・リサーチ学会編の *OR* 事典の分担執筆の草稿の一部を加筆，補遺したものである．

キーワード：混雑現象，待ち行列，$M/G/1$ 型モデル，ポラチェック・ヒンチンの公式

1．*M/G/1* 待ち行列モデル

待ち行列モデルは，一般に3つの構成要素，(1) 到着過程，(2) サービス機構，(3) 待ち行列規律から構成されている．$M/G/1$ 待ち行列モデルは，客(通信呼，パケット，トランザクション等) の到着が，到着率 λ のポアソン過程 (*Poisson process*) に従い，サービス時間が，一般分布 $H(t)$ に従う窓口1個 (扱い者1人) の無限長の待ち行列を許す最も基本的なモデルである．客の到着時点列を $\{\tau_r, r=0,1,\cdots\}$，到着間隔列を $\{A_r=\tau_r-\tau_{r-1}, r=1,2,\cdots;\tau_0=0\}$，サービス時間列を $\{B_r, r=1,2,\cdots\}$ と表せば，A_r と B_r は，いずれも互いに独立で，$r=1,2,\cdots$ に対して同一の分布関数により

$$\begin{aligned} F(t) &= Pr\{A_r \le t\} = 1-e^{-\lambda t} \\ H(t) &= Pr\{B_r \le t\} \end{aligned} \tag{1}$$

と規定される．なお式 (1) より，任意の時間帯 $(\tau, \tau+t]$ の到着人数 $N_\tau(t)$ は，ポアソン分布に従い

$$Pr\{N_\tau(t)=k\} = \frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}, \quad k=0,1,\cdots \tag{2}$$

と表される．客のサービス規律として，通常，先着順 (*FCFS : first-come, first-served*) を仮定するが，後着順，ランダム順サービスなどのサービス規律を考えることもある．類似の $M/G/1$ 型の待ち行列モデルは，上記の $M/G/1$ モデルから派生する種々の待ち行列モデルを指し，例えば有限待合室モデル ($M/G/1(m)$)，有限呼源モデル ($M(n)/G/1$)，待ち時間制限式モデル ($M/G/1(T_w)$) 集団到着個別処理モデル ($M^{[X]}/G/1$)，休暇時間(準備時間)を伴う待ち行列(バケーションモデル)などがある．複数個の待ち行列をもつモデルとしては，多重待ち行列(ポーリングモデル)，優先権のある待ち行列，移動扱い者によって処理される直列型(網型)の待ち行列などがある．また，$M/G/1$ モデルの双対的な待ち行列モデルとして，$GI/M/1$ モデルを考えることもある．

以下に，$M/G/1$ モデルとその類似モデルの解析について，いくつかコメントしておこう．$M/G/1$ モデルや $M/G/1$ 型モデルの常套的な解析法として，客のサービス終了直後における系内人数に着目する隠れマルコフ連鎖法(補遺: 注1，付録: 用語1 参照)や，系内人数の他に残余サービス時間(あるいはサービス経過時間)を状態変数として取り入れる補助変数法(用語2)が知られている．待ち行列モデル $M/G/1$ において，サービス時間分布 $H(t)$ の n 次積率を $E(H^n)$, $n=1,2,\cdots$,

そのラプラス・スチルチェス変換(LST : *Laplace-Stieltjes transform*) を $H^*(s)$ と表し，客のサービス終了(退去時点)直後における系内人数の定常分布 $\{\pi_j\}$ の母関数を $\Pi(z)$ と表す．利用率(*utilization factor*) $\rho = \lambda E(H) < 1$ のときにシステムは安定となり，時間の経過とともに定常状態(平衡状態)へ近づく．非割り込みのサービス規律(先着順，ランダム順など)の下に，母関数 $\Pi(z)$ は

$$\begin{aligned}\Pi(z) &= \frac{\pi_0(1-z)}{1-z/H^*(\lambda-\lambda z)}, \\ \pi_0 &= 1-\rho\end{aligned} \tag{3}$$

で与えられる．先着順サービスの下では，ある客 c の系内時間 Θ 内に到着する客数と c の退去時点の系内人数は等しく且つ c の系内時間 Θ と Θ 内の到着客の計数過程 $\{N_\tau(t)\}$ は独立であるから，待ち時間 W の定常分布 $W(x)$ と系内時間 Θ の定常分布 $\Theta(x)$ の LST をそれぞれ $W^*(s)$, $\Theta^*(s)$ と表せば，Θ の間に到着する客数に関して

$$\begin{aligned}\Pi(z) &= \Theta^*(\lambda(1-z)) \\ &= W^*(\lambda(1-z))H^*(\lambda(1-z))\end{aligned} \tag{4}$$

の関係が成立し，式(3),(4)より $W^*(s)$ について次式を得る(注2).

$$W^*(s) = \frac{(1-\rho)s}{s-\lambda(1-H^*(s))} \tag{5}$$

これより待ち時間 W の n 次積率 $E(W^n)$, $n = 1, 2, \cdots$ が，両辺を逐次微分して $s = 0$ とおいて求められる．以下に平均待ち時間 $E(W)$ と2次積率 $E(W^2)$ の評価式を示しておこう．

$$E(W) = \frac{\lambda E(H^2)}{2(1-\rho)} \tag{6}$$

$$E(W^2) = \frac{\lambda E(H^3)}{3(1-\rho)} + 2E(W)^2 \tag{7}$$

これらは，ポラチェックとヒンチンにより最初に求められたもので，通常，$W^*(s)$ と $E(W)$ の評価式をポラチェック・ヒンチンの公式(*Pollaczek-Khintchine formula*)と呼んでいる．式(6)は，C^2 をサービス時間分布の平方変動係数(*squared coefficient of variation*, $V(H)/\{E(H)\}^2$) として

$$E(W) = \frac{\lambda(1+C^2)}{2(1-\rho)} \tag{8}$$

と表される．式(8)は，同じ λ と $E(H)$ をもった $M/M/1$ モデルの平均待ち時間を $E(W)_{M/M/1}$ とすれば

$$E(W)_{M/G/1} = \frac{1}{2}(1+C^2)E(W)_{M/M/1} \tag{9}$$

と書ける．これは $M/G/1$ モデルではサービス時間分布の<バラツキ>が大きい程長く待たされることを示しており，最も平均待ち時間が短いのはサービス時間が一定($C^2 = 0$)のときで，$M/M/1$ の 1/2 であることが確かめられる．また，客が待ちに入る確率(待ち率) $\overline{W}(0)$ は，式(5)より

$$\begin{aligned}\overline{W}(0) &= 1 - W(0) \\ &= 1 - \lim_{s\to\infty} W^*(s) \\ &= \rho\end{aligned} \tag{10}$$

と表され，サービス時間分布の2次積率以上には依存しないことが分かる．このような性質は，一般にサービス時間分布の形に対する不変性(*robustness*)，または不感性(*insensitivity*)と言われる(注3).

以下に，$M/G/1$ モデルとその類似モデルの解析について，いくつかコメントする．

前記の $W^*(s)$ の構造に確率的解釈を与え，上記のように 母関数 $\Pi(z)$ を介さないで，これを直接的に求める手法として全稼働期間解析法(*busy-period analysis*, 用語3)がある．各種の全稼働期間中に到着する客の条件付き待ち時間分布の LST $W^*(s|\textit{busy period})$ を基本として $W^*(s)$ を構成するものである．これによれば，上記の $W^*(s)$ は次式で表される．

$$\begin{aligned}W^*(s) &= (1-\rho)W^*(s|\textit{idle period}\text{ に到着}) \\ &\quad + \rho W^*(s|\textit{busy period}\text{ に到着}) \\ &= (1-\rho)\cdot 1 \\ &\quad + \rho\cdot R^*(s)\cdot\frac{s(1-\rho)}{s-\lambda+\lambda H^*(s)}\end{aligned} \tag{11}$$

ただし $R^*(s)$ は，残余サービス時間分布

$$R(t) = \frac{1}{E(H)}\int_0^t [1-H(x)]\,\mathrm{d}x \quad t \geq 0 \tag{12}$$

の LST で，$R^*(s) = [1-H^*(s)]/[sE(H)]$ で与えられる．

時刻 t に仮に客が到着したとすれば，その客が待たなければならない時間 $v(t)$ は，仮り待ち時間 (*virtual waiting time*) と呼ばれる．時刻 t における仮り待ち時間の分布関数 $V(t,x)$, $x, t \geq 0$ に関して，次のタカッチの積分-微分方程式 (*Takács' integro-differential equation*) が成立する．

$$\frac{\partial V(t,x)}{\partial t} = \frac{\partial V(t,x)}{\partial x}$$

$$-\lambda\left[V(t,x)-\int_{0-}^{x}H(x-y)\mathrm{d}_yV(t,y)\right] \qquad (13)$$

定常状態 $(t\to\infty)$ における仮り待ち時間の分布関数 $V(x)$ の *LST* $V^*(s)$ は，左辺を零としてこれを解いて求まる(注4)．すなわち *FCFS* の $M/G/1$ モデルでは，*PASTA* (用語4)が成立するので $W^*(s)=V^*(s)$ であり，このようにしても式(5)の $W^*(s)$ が求められる．さらに，客の到着が一般分布 $F(t)$ に従う $GI/G/1$ モデルにおけるリンドレーの積分方程式(用語5)

$$W(t)=\begin{cases}\displaystyle\int_{0-}^{\infty}C(t-x)\mathrm{d}W(x) & t\ge 0\\ 0 & t<0\end{cases} \qquad (14)$$

$$C(t) = \int_{x=0}^{\infty}H(t+x)\mathrm{d}F(x) \qquad -\infty<t<+\infty \qquad (15)$$

やタカッチの公式 (*Takács' formula*)

$$\begin{aligned}V^*(s) &= (1-\rho)V^*(s|idle\ period)\\ &\quad+\rho V^*(s|busy\ period)\\ &= 1-\rho+\rho R^*(s)W^*(s)\end{aligned} \qquad (16)$$

を利用しても $W^*(s)$ が直接的に求められる．式(16)は，$M/G/1$ における式(11)の $GI/G/1$ への一般化であり，さらに到着過程に定常性のみを仮定した一般的な $G/G/1$ においても成立することが示されている(注5)．本式と $W^*(s)=V^*(s)$ より直ちにポラチェック・ヒンチンの公式を得る．

なお，式(5)の $W^*(s)$ の逆変換形 $W(t)$ の一つとして次式が知られている．

$$W(t)=(1-\rho)\sum_{k=0}^{\infty}\rho^kR_k(t) \quad t\ge 0 \qquad (17)$$

ただし $R_0(t)=1$ で，$R_k(t)$ は，式(12)の残余サービス時間分布 $R(t)$ 自身の $k(\ge 1)$ 回の畳み込み (*convolution*) を表す．

2．補遺

注1)

$M/G/1$ 型の複数待ち行列モデルなどに隠れマルコフ連鎖法を適用すると任意の N 次元の隠れマルコフ連鎖 $\{\xi_r^{(1)},\xi_r^{(2)},\cdots,\xi_r^{(N)}\}$ の定常分布を求めることが問題となるが，実際に $N\ge 3$ に対してその結合分布(同時分布)を求めることは一般的には相当に困難で，いわゆる<多次元の障壁>がある．例えば，客数制限式や時間制限式のポーリングモデルのように，$N(\ge 3)$ 次元の隠れマルコフ連鎖に定式化される応用面の広い $M/G/1$ 型モデルの中にも未解析なものが少なくない[4],[6]．あるクラスの2次元のマルコフ連鎖やマルコフ過程に対してその定常確率や過渡確率を求めるのに有効な解析的手法として，境界値問題に帰着する方法(*boundary value technique*)がある[1],[2]．

注2)

この関係式(4)は，一種のリトルの定理の拡張(分布版)であり，*LLD* (*distributional form of Little's law*) と呼ばれる[8]．先着順サービス(*FCFS*)の $M/G/1$ 型モデルで，本式が成立しない数少ない例として，移動扱い者によって処理される直列型待ち行列モデル[7]や*N*-方策 (*N-Policy*) のバケーションモデル[11]がある．

注3)

サービス時間分布形に対して不変性(*robustness*)のある他の事例として，即時式モデル $M/G/S(0)$ のアーランの損失式 (*Erlang loss formula*)，有限呼源の即時式モデル $M(n)/G/S(0)$ のエングセットの公式 (*Engset formula*)，$M/G/1$ モデルの平均全稼働期間の公式 $E(B)=E(H)/(1-\rho)$ (用語3)が有名である．ここに $E(B)$ は，プロセッサ・シェアリング規律の $M/G/1$ モデルにおける平均滞在時間に一致することが知られている．プロセッサ・シェアリング規律とは，システムにいる n 人の客は扱い者の $1/n$ のサービスを受けるサービス規律である．式(10)に対応する評価式 $Pr\{V>0\}=\rho$ (V は任意時点の残余サービス時間)が $G/G/1$ で成立つことが導かれる．但し，$M/G/1$ モデルを除き $Pr\{W>0\}\ne\rho$ に注意すべきである(注5)．なお，式(3),(6),(9)は，$M/G/1$ モデルにおいて必ずしも *FIFO* でなくとも，非割り込み (*non-preemptive*) のサービス規律であれば成立する．

注4)

タカッチの積分-微分方程式，式(13)より確率密度関数 $v(x)$ に関して次式を得る．

$$\begin{aligned}v(x) &= \lambda V(0)\overline{H}(x)\\ &\quad+\lambda\int_{0+}^{x}\overline{H}(x-y)v(y)dy, \quad x>0\end{aligned} \qquad (18)$$

ただし，$\overline{H}(x)=1-H(x)$．本式は，レベル-クロッシング法 (*level-crossing analysis*)により直接的に導かれる[3]．その左辺(右辺)は，仮り待ち時間 V の標本関数がレベル $V=x$ を，単位時間当りに上から下に(下から上に)横切る

平均回数として意味付けられる．

注5)

レベル-クロッシング法によれば，$G/G/1$ においては，式(18)の右辺の $V(0)$, $v(y)$ はいずれも $W(0)$, $w(y)$ に置き換えねばならぬから，これより式(16)が導かれる [3]．以下に式(16)より導出される，$G/G/1$で成立する関係式を示しておこう．但し，$E(B)$, $E(C)$ は，それぞれ平均全稼働期間と平均稼働周期(用語3参照)を表す．

$$\begin{aligned} V(0) &= 1-\rho \\ W(0) &= 1/\{\lambda E(C)\} \\ E(B) &= E(H)/W(0) \\ E(C) &= E(H)/\{\rho W(0)\} \\ E(B)/E(C) &= \rho \end{aligned} \tag{19}$$

従って，注3) の $M/G/1$ における関係式は，式(19)において $V(0)=W(0)$ $(PASTA)$ より導かれる．

参考文献

[1] J. W. Cohen and O. J. Boxma (1983): *Boundary Value Problems in Queueing System Analysis*, North-Holland Mathematics Study 79, North-Holland.

[2] J. W. Cohen (1992): *Analysis of Random Walks*, IOS Press.

[3] B. Doshi (1992): *Level-crossing analysis of queues*, Queueing and Related Models, edited by U. Narayan Bhat and I. V. Basawa, 3–33.

[4] 片山　勁(1991): 通信トラヒック理論における多次元マルコフモデルの解析法，富山県立大学紀要，第1巻，51-59.

[5] T. Katayama (1995): Priority queues with semi-exhaustive service, *Queueing systems*, 21, 161-181.

[6] T. Katayama (1998): Two-class priority queueing system with time-limited schedule, *Performance and Management of Complex Communication Networks*, edited by T. Hasegawa, H.Takagi and Y. Takahashi, CHAPMAN & HALL, 213-232.

[7] T. Katayama (1999): A note on sojourn time analysis of a two-stage queueing system, *Stochastic Models*, 15, 298-313.

[8] J. Keilson and L.D. Servi (1988): A ditributional form of Little's law, *Operations Research Letters*, 7, 223-227.

[9] N.U. Prabhu (1997): *Foundation of Queueing Theory*, Kluwer Academic Publishers.

[10] L. Takács (1963), The limiting distribution of the virtual waiting time and the queue size for a single-server queue with recurrent input and general service times, *Sankhya* Ser. A25, 91–100.

[11] H. Takagi (1991), *Queueing Analysis :A Foundation of Performance Evaluation Vol. 1, Vacation and Priority Systems*, Part I, Elsevier Science Publisher B. V., North-Holland.

A 用語の解説

(1) 隠れマルコフ連鎖法

例えば $M/G/1$ モデルにおいて，時刻 $t \geq 0$ における系内人数を $\xi(t)$ とすると，確率過程 $\{\xi(t)\}$ には，記憶性が有るからマルコフ過程とはならない．ここで客の退去時点列を $\{t_r, r = 0, 1, \cdots\}$ とし，退去時点直後の系内人数を $\xi_r = \xi(t_r + 0)$ と表せば，確率過程 $\{\xi_r\}$ は，マルコフ連鎖となる．以上の事実からマルコフ連鎖 $\{\xi_r\}$ を確率過程 $\{\xi(t)\}$ に対する隠れマルコフ連鎖 (*imbedded Markov chain*)，$\{t_r\}$ を再生点 (*regeneration point*) と言う．隠れマルコフ連鎖法 (再生点法) による解析は，先ず隠れマルコフ連鎖 $\{\xi_r\}$ の定常分布を求め，その結果を確率過程 $\{\xi(t)\}$ の定常分布など問題が必要とする特性に変換する，と言う 2 段階を経て行なう必要がある [11]. 隠れマルコフ連鎖法は，通常系内人数など離散的な状態をとるモデルに適用される．先着順サービスの $GI/G/1$ モデルにおいては，連続量である実待ち時間の変数列 $\{W_r\}$ が，仮り待ち時間 (*virtual waiting time*) の確率過程 $\{v(t)\}$ に対する隠れマルコフ連鎖と成っている．

(2) 補助変数法

例えば $M/G/1$ モデルにおいて，時刻 t における系内人数を $\xi(t)$，サービス中の客のサービス経過時間 (*elapsed service time*) を $X(t)$，残余サービス時間 (*remaining service time*) を $R(t)$ と表せば，ベクトル過程 $\zeta_X(t) = \{\xi(t), X(t)\}$ および $\zeta_R(t) = \{\xi(t), R(t)\}$ は，2 次元のマルコフ過程となる．確率変数 $X(t)$，$R(t)$ を補助変数 (*supplementary variable*) と言う．すなわち，確率過程 $\{\xi(t)\}$ は，マルコフ過程ではないが，適当な補助変数を導入することによって，解析すべきベクトル過程の次元数は増えるが，マルコフ化が可能となる [11]. この解析法を補助変数法 (*supplementary-variable method*) と言う．本手法は，隠れマルコフ連鎖法に対して，任意時点の状態確率が直接的に求められること，過渡状態確率 (*transient state probability*) の解析に適合していることなどの長所がある．

(3) 全稼働期間解析法

全稼働期間 (*busy period*) B は，空きのシステムに客が入った瞬間からシステムが完全に空きになる次の瞬間までの時間の長さ (すなわち扱い者の連続稼働時間) と定義される．分布関数 $B(t) = Pr\{B \leq t\}$ の *LST* を $\beta^*(s)$ で表すと $M/G/1$ モデルにおいて，$\beta^*(s)$ は関数方程式

$$\beta^*(s) = H^*[s + \lambda(1 - \beta^*(s))] \qquad \text{(A1)}$$

の絶対値最小の解である．これを用いて，初期値 T の *LST* $T^*(s)$ の場合の全稼働期間 D の *LST* $D^*(s)$ は

$$D^*(s) = T^*[s + \lambda(1 - \beta^*(s))] \qquad \text{(A2)}$$

で与えられる．これを出発点として，各種の全稼働期間 D_n, $n = 1, 2, \cdots, N$ における条件付き待ち時間の *LST* $W^*(s \mid D_n\text{-}busy\ period)$ と任意時点 (ポアソン呼) がその全稼働期間に入る確率 P_n を用いて

$$\begin{aligned} W^*(s) &= \sum_n P_n W^*(s \mid D_n\text{-}busy\ period), \\ \sum_n P_n &= 1 \end{aligned} \qquad \text{(A3)}$$

として $W^*(s)$ を求める方法を全稼働期間解析法 (*busy-period analysis*) と言う．$M/G/1$ 型モデルに限定されるが優先権のある待ち行列の解析に有効である [5], [11]. なお，空きのシステムに客が入った時点からシステムが完全に空きになり，その後初めて客が到着するまでの時間を稼働周期 C (*busy cycle*) と呼ぶ．すなわち，$C = B + I$, 但し I は，システムの空き時間である．

(4) *PASTA*

到着客が見る系内人数の定常分布 $\{\pi_j^+\}$ と任意時点の系内人数の定常分布 $\{P_j\}$ に関して

$$\pi_j^+ = P_j, \quad j = 0, 1, 2, \cdots \qquad \text{(A4)}$$

が成立する性質を，その頭文字をとって *PASTA* (*Poisson Arrivals See Time Averages*) と呼んでいる．ただし，ポアソン到着であると言う仮定は，式 (A4) が成立するための十分条件であるが，必要条件ではない．

(5) リンドレーの方程式

客の到着が再生過程 (*renewal process*) に従う $GI/G/1$ モデルにおいて，到着分布とサービス時間分布をそれぞれ $F(t)$, $H(t)$ と表し，その平均を $1/\lambda$, $E(H)$ とする．先着順サービス (*FCFS*) の下で $r (r = 0, 1, \cdots)$ 番目に生起した客の待ち時間を W_r とすれば，$W_0 = 0$ で

$$\begin{aligned} W_{r+1} &= max[0, W_r + C_{r+1}] \\ &\quad \text{ただし } C_r = B_r - A_r (r \geq 1) \end{aligned} \qquad \text{(A5)}$$

が成立する．ここに A_r は，r 番目に生起した客と $(r-1)$ 番目に生起した客の到着間隔で，B_r は r 番目に生起した客のサービス時間である．確率変数列 $\{W_r\}$ は，マルコフ

連鎖を成し，平衡状態における W_r の分布関数，すなわち

$$W(t) = \lim_{r \to \infty} P_r\{W_r \le t | W_0 = 0\} \tag{A6}$$

は，平衡条件 $\rho = \lambda E(H) < 1$ の下に，式(14)の積分方程式を満足する．ただし式(15)の $C(t)$ は，分布関数である．このウィーナー・ホップ(*Wiener-Hopf*)型の積分方程式をリンドレーの積分方程式(*Lindley's integral equation*)と呼ぶ[9].

(6) ウィーナー・ホップの方程式

未知関数 $\varphi(t)(0 \le t < +\infty)$ の次の積分方程式は，ウィーナー・ホップ(*Wiener-Hopf*)の方程式と呼ばれる．

$$\varphi(t) = f(t) + \int_{0-}^{\infty} K(t-x)\varphi(x)\mathrm{d}x \tag{A7}$$

ただし，既知関数 $f(t)(0 \le t < +\infty)$ と既知の核関数(*kernel function*) $K(t)(-\infty < t < +\infty)$ は，連続である．ここで $f(t) \ne 0$ のとき非同次(*non-homogeneous*)，$f(t) = 0$ のとき同次(*homogeneous*)の方程式と言う．$\varphi(t)$ の *LST* $\varphi^*(s)$ の決定は，$-\infty < t < +\infty$ で定義される両側ラプラス変換(*bilateral LT*)を用いて，一種の境界値問題に帰着される．$K(t)$ の両側ラプラス変換 $K^+(s)$ により定まる関数 $1 - K^+(s)$ のスペクトル分解(*spectrum factorization*)によりこの境界値問題を解き $\varphi^*(s)$ が決定される[9].

Performance Analysis of Communication Systems and $M/G/1$ Queueing Models

Tsuyoshi KATAYAMA and Kaori KOBAYASHI

Department of Electronics and Informatics, Faculty of Engineering

Summary

Queueing systems theory was originally developed to facilitate the analysis and design of telephone switching systems in the early 1900s. With the explosive growth of computer science and engineering, a major new area of applications was born in the early 1960s, and new models and theory were developed to meet the needs of this new technology. With the increasing convergence between telecommunications and computer technology in the 1980s, queueing systems theory is again providing the methodology for the performance analysis of communication and computer systems.

In this paper, we will present a basic queueing model which can be described by the shorthand notation, $M/G/1$, first introduced by D.G. Kendall, and some related queueing models. This queueing model plays a fundamental role in evaluation of the quality of service (QoS) in communication systems and communication networks, where the "customers (i.e. Poissonian arrivals)" might, for example, be calls, transactions or jobs, and the "server" a transmission circuit or a CPU. The related queueing models, for example, $M/G/1(m)$, $M(n)/G/1$, $M/G/1(T_w)$, $M^{[X]}/G/1$ and so on, may be ramified from the basic queueing model $M/G/1$. We will also derive the well-known Pollaczek-Khintchine formula and some important formulas related to the queueing model $M/G/1$ by using the imbedded Markov chain method, the supplementary variables method, the busy period analysis (also, called the delay cycle analysis) and the level-crossing analysis.