Calogero-Moser-Sutherland 格子の長波近似とソリトン解

石森　勇次
(工学部一般教育等)

Calogero-Moser-Sutherland 格子に対して，長波近似のもとでは1ソリトン解が存在することを示す。このソリトンによって，格子は1格子間隔だけ圧縮される。

キーワード：非線形波動，可積分系，ソリトン，長波近似，Calogero-Moser-Sutherland 系

1．はじめに

戸田格子 [1] をはじめとして，無数の可積分な非線形力学系が知られている [2]。波動系の場合，これらの可積分系の持つ共通の性質の1つは，厳密な N ソリトン解を持つことである。ところが，長距離相互作用系であるという点を除けば，戸田格子と同様な代表的可積分系である Calogero-Moser 系 [3-6] に対して，N ソリトン解は知られていない。本研究では，少なくとも長波近似のもとで1ソリトン解が存在することを示す。

2．Calogero-Moser-Sutherland 格子

Calogero-Moser 系は，次のようなエネルギー関数（ハミルトン関数）で記述される系である。

$$H=\frac{1}{2}\sum_{n}\left(\frac{dx_n}{dt}\right)^2+\sum_{m>n}\frac{g}{(x_m-x_n)^2} \tag{1}$$

このとき，運動方程式は

$$\frac{d^2x_n}{dt^2}=-\sum_{\substack{m\\(m\neq n)}}\frac{2g}{(x_m-x_n)^3} \tag{2}$$

で与えられる。

いま，粒子数が N，長さが $L=aN$ の1次元周期系を考える。この区間内の粒子の位置を $x_1,x_2,\cdots,x_N$ とすると，区間外の粒子の位置は $x_n+lL\ (l=\pm1,\pm2,\pm3,\cdots)$ である。従って，区間内の粒子に関係している相互作用エネルギーは，和の公式

$$\sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{l^2}=\frac{\pi^2}{6} \tag{3}$$

$$\sum_{l=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(x+l)^2}=\frac{\pi^2}{\sin^2\pi x}\quad(x\neq 整数) \tag{4}$$

を用いると

$$\begin{aligned}&\sum_{n=1}^{N}\sum_{\substack{l=-\infty\\(l\neq0)}}^{\infty}\frac{g}{l^2L^2}\\&+\sum_{m=2}^{N}\sum_{n=1}^{m-1}\sum_{l=-\infty}^{\infty}\frac{g}{(x_n-x_m+lL)^2}\\&=\frac{\pi^2Ng}{3L^2}+\sum_{m=2}^{N}\sum_{n=1}^{m-1}\frac{\pi^2g}{L^2\sin^2\dfrac{\pi(x_m-x_n)}{L}}\end{aligned}$$

となるので，1次元周期系のエネルギー関数は，定数を除いて

$$\begin{aligned}H&=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{dx_n}{dt}\right)^2+\sum_{m=2}^{N}\sum_{n=1}^{m-1}v(x_m-x_n),\\v(x)&=\frac{\pi^2g}{L^2\sin^2\dfrac{\pi x}{L}}\end{aligned} \tag{5}$$

で与えられる。この1次元周期系を Calogero-Moser-Sutherland 系という。

1次元周期系のエネルギー関数 (5) が極小値となる状態を求める。

$$x_1<x_2<\cdots<x_N \tag{6}$$

として，

$$y_n=x_{n+1}-x_n\quad(n=1,2,\cdots,N-1) \tag{7}$$

とおく。ポテンシャルが極小となる状態として，関数

$$\begin{aligned}
&V(y_1, y_2, \cdots, y_{N-1})\\
&= v(y_1) + v(y_2) + \cdots + v(y_{N-1})\\
&+ v(y_1 + y_2) + \cdots + v(y_{N-2} + y_{N-1})\\
&\vdots\\
&+ v(y_1 + y_2 + \cdots + y_{N-1}) \qquad (8)
\end{aligned}$$

が極値となる条件

$$\frac{\partial V}{\partial y_n} = 0 \quad (n = 1, 2, \cdots, N-1)$$

則ち

$$\begin{aligned}
&v'(y_n)\\
&+ v'(y_{n-1} + y_n) + v'(y_n + y_{n+1})\\
&\vdots\\
&+ v'(y_1 + y_2 + \cdots + y_{N-1}) = 0 \qquad (9)
\end{aligned}$$

を満たす解

$$y_n = \frac{L}{N} = a \qquad (10)$$

がある。これは，粒子が等間隔 a で規則的に並んだ格子を表しているので，Calogero-Moser-Sutherland 格子と呼ぶことにする。

以下の議論では，a を固定して $N \to \infty$ とする。このとき，$v(x)$ は再び (1) と同じ形のポテンシャル

$$v(x) \to \frac{g}{x^2} \quad (N \to \infty)$$

になる。

3．長波近似（和の公式）

ここでは，整数変数の関数 f_n が n とともにゆっくり変化するとして，次のような和の公式が成り立つことを示す。

$$\sum_{\substack{m=-\infty\\(m\neq n)}}^{\infty} \frac{f_m}{m-n} \approx \pi\mathcal{H}(f(n)) - \frac{\partial f(n)}{\partial n} \qquad (11)$$

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{m=-\infty\\(m\neq n)}}^{\infty} \frac{f_m}{(m-n)^2}\\
&\approx \frac{\pi^2}{3} f(n) + \pi\mathcal{H}\left(\frac{\partial f(n)}{\partial n}\right) - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f(n)}{\partial n^2} \qquad (12)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{m=-\infty\\(m\neq n)}}^{\infty} \frac{f_m}{(m-n)^3}\\
&\approx \frac{\pi^2}{3}\frac{\partial f(n)}{\partial n} + \frac{\pi}{2}\mathcal{H}\left(\frac{\partial^2 f(n)}{\partial n^2}\right)\\
&-\frac{1}{6}\frac{\partial^3 f(n)}{\partial n^3} \qquad (13)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{m=-\infty\\(m\neq n)}}^{\infty} \frac{f_m}{(m-n)^4}\\
&\approx \frac{\pi^4}{45} f(n) + \frac{\pi^2}{6}\frac{\partial^2 f(n)}{\partial n^2} + \frac{\pi}{6}\mathcal{H}\left(\frac{\partial^3 f(n)}{\partial n^3}\right)\\
&-\frac{1}{24}\frac{\partial^4 f(n)}{\partial n^4} \qquad (14)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{m=-\infty\\(m\neq n)}}^{\infty} \frac{f_m}{(m-n)^5}\\
&\approx \frac{\pi^4}{45}\frac{\partial f(n)}{\partial n} + \frac{\pi^2}{18}\frac{\partial^3 f(n)}{\partial n^3} + \frac{\pi}{24}\mathcal{H}\left(\frac{\partial^4 f(n)}{\partial n^4}\right)\\
&-\frac{1}{120}\frac{\partial^5 f(n)}{\partial n^5} \qquad (15)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{m=-\infty\\(m\neq n)}}^{\infty} \frac{f_m}{(m-n)^6}\\
&\approx \frac{2\pi^6}{945} f(n) + \frac{\pi^4}{90}\frac{\partial^2 f(n)}{\partial n^2} + \frac{\pi^2}{72}\frac{\partial^4 f(n)}{\partial n^4}\\
&+\frac{\pi}{120}\mathcal{H}\left(\frac{\partial^5 f(n)}{\partial n^5}\right) - \frac{1}{720}\frac{\partial^6 f(n)}{\partial n^6} \qquad (16)
\end{aligned}$$

ここで，$f(x)$ は x が整数 n のとき f_n と関数値が一致する実数変数の関数である。また，$\mathcal{H}$ は Hilbert 変換

$$\mathcal{H}(f(x)) = \frac{1}{\pi}\mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(y)}{y-x} dy \qquad (17)$$

を表す。

以上の公式を導くために，離散変数の関数 f_n に対して，フーリエ級数の公式を逆にしたもの

$$f_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F_k e^{ikn} dk \quad (n = \text{整数}) \qquad (18)$$

$$F_k = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n e^{-ikn} \quad (-\pi < k < \pi) \qquad (19)$$

を考える。ここで，Poisson の和の公式

$$\begin{aligned}
\sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)\\
&= \sum_{s=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{2\pi sxi} dx\\
&= \sum_{s=-\infty}^{\infty} F(2\pi s) \qquad (20)
\end{aligned}$$

に注目する。$F(k)$ は $f(x)$ の Fourier 変換であり

$$F(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx, \qquad (21)$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(k)e^{ikx}dk \tag{22}$$

である。この Poisson の和の公式を用いると

$$\begin{aligned} F_k &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n e^{-ikn} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)e^{-ikn} \\ &= \sum_{s=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i(k-2\pi s)x}dx \\ &= \sum_{s=-\infty}^{\infty} F(k-2\pi s) \end{aligned} \tag{23}$$

を得る。

f_n が n とともにゆっくり変化すると仮定する（長波近似）。即ち，x が 1 程度変化してもほとんど $f(x)$ は変化しないと仮定する。このとき，実空間と波数空間での関数の広がりぐあいに対する不確定性関係 $\Delta x\Delta k = O(1)$ および $\Delta x \gg 1$ より，$F(k)$ は $k=0$ 付近に局在し，$k=\pm\pi$ ではほとんど 0 である。従って (23) より

$$F(k) \approx \begin{cases} F_k & (|k| < \pi) \\ 0 & (|k| \geq \pi) \end{cases} \tag{24}$$

以上のような長波近似のもとで，和の公式 (11) から (16) を導くことができる。その際，次の Fourier 級数の公式を利用する。ただし，$-\pi < k < \pi$ である。

$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\sin(kj)}{j} = \frac{\pi}{2}\mathrm{sgn}(k) - \frac{1}{2}k \tag{25}$$

$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\cos(kj)}{j^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi}{2}k\mathrm{sgn}(k) + \frac{1}{4}k^2 \tag{26}$$

$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\sin(kj)}{j^3} = \frac{\pi^2}{6}k - \frac{\pi}{4}k^2\mathrm{sgn}(k) + \frac{1}{12}k^3 \tag{27}$$

$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\cos(kj)}{j^4} = \frac{\pi^4}{90} - \frac{\pi^2}{12}k^2 + \frac{\pi}{12}k^3\mathrm{sgn}(k) - \frac{1}{48}k^4 \tag{28}$$

$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\sin(kj)}{j^5} = \frac{\pi^4}{90}k - \frac{\pi^2}{36}k^3 + \frac{\pi}{48}k^4\mathrm{sgn}(k) - \frac{1}{240}k^5 \tag{29}$$

$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\cos(kj)}{j^6} = \frac{\pi^6}{945} - \frac{\pi^4}{180}k^2 + \frac{\pi^2}{144}k^4 - \frac{\pi}{240}k^5\mathrm{sgn}(k) + \frac{1}{1440}k^6 \tag{30}$$

例えば，和の公式 (11) は次のように導かれる。

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{m=-\infty \\ (m\neq n)}}^{\infty}\frac{f_m}{m-n} &= \sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j}(f_{n+j} - f_{n-j}) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dkF_k e^{ikn}2i\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\sin(kj)}{j} \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[i\pi\mathrm{sgn}(k) - ik]F_k e^{ikn}dk \\ &\approx \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}[i\pi\mathrm{sgn}(k) - ik]F(k)e^{ikn}dk \end{aligned}$$

ここで，

$$\mathcal{H}(e^{ikn}) = i\mathrm{sgn}(k)e^{ikn}$$
$$\frac{\partial e^{ikn}}{\partial n} = ike^{ikn}$$

に注意すると公式 (11) を得る。他の公式も同様にして導くことができる。

具体的に関数

$$f_n = \frac{\lambda}{n^2+\lambda^2} \quad (\lambda \gg 1,\ 長波長) \tag{31}$$

に対して，公式 (11) を適用してみる。厳密な和は

$$\sum_{\substack{m=-\infty \\ (m\neq n)}}^{\infty}\frac{f_m}{m-n} = -\pi\coth(\lambda\pi)\frac{n}{n^2+\lambda^2} + \frac{2\lambda n}{(n^2+\lambda^2)^2} \tag{32}$$

となる。一方，近似式は

$$\pi\mathcal{H}(f(n)) - \frac{\partial f(n)}{\partial n} = -\pi\frac{n}{n^2+\lambda^2} + \frac{2\lambda n}{(n^2+\lambda^2)^2} \tag{33}$$

となる。

$$\begin{aligned} &\coth(\pi) = 1.00374\cdots, \\ &\coth(2\pi) = 1.00000697\cdots, \\ &\vdots \\ &\coth(\lambda\pi) = 1 + O(e^{-2\lambda\pi}) \end{aligned}$$

なので，さほど大きい λ を考えなくても公式は十分よい近似を与える。

4．長波方程式とソリトン解

Calogero-Moser-Sutherland 格子の平衡解 (10) のときの x_n を x_n^* で表すと

$$x_n^* = na + C \quad (C = 定数) \tag{34}$$

である。ここで，平衡点からのずれの運動を記述するために

$$C = -\frac{L}{2} = -\frac{aN}{2} \tag{35}$$

とおき，さらに粒子の平衡点からの変位 u_n を

$$u_n = x_{\frac{N}{2}+n} - x^*_{\frac{N}{2}+n} \tag{36}$$

とおき $N \to \infty$ とする。このとき，運動方程式は

$$\frac{d^2u_n}{dt^2} = -\sum_{\substack{m=-\infty \\ (m\neq n)}}^{\infty} \frac{2g}{[(m-n)a+u_m-u_n]^3} \tag{37}$$

となる。

ここで，粒子の相対変位が格子点の間隔より小さい，即ち

$$\left|\frac{u_m-u_n}{(m-n)a}\right| < 1 \quad (m \neq n) \tag{38}$$

という仮定をすると，運動方程式 (37) は次のように展開される。

$$\begin{aligned}&\frac{d^2u_n}{dt^2}\\ &= \frac{6g}{a^4}\sum_{\substack{m=-\infty \\ (m\neq n)}}^{\infty}\frac{u_m-u_n}{(m-n)^4}\\ &-\frac{12g}{a^5}\sum_{\substack{m=-\infty \\ (m\neq n)}}^{\infty}\frac{(u_m-u_n)^2}{(m-n)^5}\\ &+\frac{20g}{a^6}\sum_{\substack{m=-\infty \\ (m\neq n)}}^{\infty}\frac{(u_m-u_n)^3}{(m-n)^6}-\cdots\end{aligned} \tag{39}$$

この式に対して長波近似を適用すると，和の公式 (14) から (16)，および

$$\left[\frac{\partial^\alpha}{\partial m^\alpha}\{u(m,t)-u(n,t)\}^\beta\right]_{m=n} = 0$$
$$(0 \leq \alpha < \beta)$$

より

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\pi^2 g}{a^4}\frac{\partial^2 u}{\partial n^2} + \frac{\pi g}{a^4}\mathcal{H}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial n^3}\right)\\ -\frac{4\pi^2 g}{a^5}\frac{\partial u}{\partial n}\frac{\partial^2 u}{\partial n^2} + O\left[\frac{\partial^4}{\partial n^4}\right]\end{aligned} \tag{40}$$

を得る。さらに

$$x = na \tag{41}$$

とおき，Hilbert 変換が空間スケールの変換によって変わらないことに注意すると，長波方程式

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\\ &= c^2\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{a}{\pi}\mathcal{H}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right) - 4\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right]\end{aligned} \tag{42}$$

を得る。ここで，c は音速を表し

$$c = \frac{\pi\sqrt{g}}{a} \tag{43}$$

である。

長波方程式 (42) には，次のような 1 ソリトン解がある。

$$u = -\frac{a}{\pi}\tan^{-1}[\alpha(x-\beta t)+\gamma]+\delta \tag{44}$$

ここで，α，β は条件

$$\alpha > 0,\ \beta^2 = c^2\left(1+\frac{a}{\pi}\alpha\right) \tag{45}$$

を満たす定数であり，γ，δ は任意定数である。(45) より，ソリトンの速さはつねに音速より速いことがわかる。

$$\delta = -\frac{a}{2}$$

とすると，$x=-\infty$ で粒子は平衡点の位置にあり，$x=\infty$ では $-a$ だけ平衡点の位置からずれている。従って，1 個のソリトンによって格子は 1 格子間隔 a だけ圧縮されている。

5．おわりに

本研究では，Kalogero-Moser-Sutherland 系の格子モデルを考え，その長波方程式を導き 1 ソリトン解を求めた。この解は格子に粒子が 1 個余分にある状態が圧縮波として伝播していく様子を表している。この結果は，もし N ソリトン解があれば，それは N 個の粒子が余分にある状態であることを示唆している。長波方程式 (42) ではなく，本来の Calogero-Moser-Sutherland 格子に厳密なソリトン解があるかどうかはわからない。しかし，厳密なソリトン解を持つことは状況証拠としての可積分系の一般的な性質であるので，今後の研究によって厳密解が発見されることが期待される。

参考文献

[1] 戸田盛和：非線形格子力学，岩波書店，1987.

[2] 和達三樹：非線形波動，岩波書店，1992.

[3] F. Calogero：J. Math. Phys. **10**(1969)2191.

[4] J. Moser：Adv. Math. **16**(1975)197.

[5] B. Sutherland：J. Math. Phys. **12**(1971)246.

[6] 川上則雄：$\frac{1}{r^2}$ 型相互作用を持つ一次元量子系，日本物理学会誌**49**(1994)987.

Soliton Solutions of Long Wave Equation in the Calogero-Moser-Sutherland Lattice

Yuji ISHIMORI

Department of Liberal Arts and Sciences, Faculty of Engineering

Summary

Nonlinear solitary excitations are studied in a lattice system with the Calogero-Moser-Sutherland interaction. A long wave equation is derived and its exact soliton solutions are obtained. The lattice is compressed around a soliton and the total compression is one lattice spacing.

Key Words: nonlinear waves, solitons, integrable systems, long wave equation, Calogero-Moser-Sutherland system