可換空間上の佐藤方程式

戸田　晃一
（工学部教養教育）

可換空間上の佐藤方程式について紹介し，その拡張について報告する。

キーワード：佐藤方程式，可積分系，ソリトン方程式

1. 緒言

そもそも可積分（性）とはどういうことか？ 古典的な定義では，求積法によって解けるとき「可積分」であると言われる。しかし，「可積分」の定義は対象とする問題によっても異なり，一般的な定義は（少なくとも現段階では）無いようである。例えばソリトン方程式の場合は逆散乱法（またはそれに類する手法）により解析的に厳密解を得ることができる時は「可積分」と呼ばれる。そこで「可積分」の性質についてまとめることからこの小論は書き始めたい。

元来「可積分（性）」とは有限自由度の Hamilton 力学系に対する概念であった。すなわち，Liouville-Arnold の定理 [1]：

自由度 N の Hamilton 力学系に N 個の保存量があり，それが Poisson 括弧に関して互いに可換ならば，初期値問題は有限回の求積[1] によって解ける

が成り立つ系，すなわち初期値問題が求積操作の有限回の繰り返しで解けるのが可積分系である。それではソリトン方程式に代表される無限自由度系に関してはどうだろうか？ 実はかなり怪しくなる。無限自由度系において，一般には（少なくとも可積分系の研究者の間では）以下の性質；

1. **線形化可能**：
適当な変数変換により線形化できる。
2. **逆散乱法で解ける時** [2]：
「適当な境界条件の下で初期値問題を解くこと」が「線形の積分方程式を解くこと」に帰着できる。
3. **Lax 対の存在** [3]：
ほとんどの場合逆散乱法の手順にのる[2]。
4. **Liouville-Arnold の意味での「可積分性」**：
適当な Poisson 構造の下で無限個の互いに可換な保存量が存在する。
5. **無限個の保存量・対称性の存在（recursion operator の存在とほとんど等価）**
6. **bi-Hamilton 力学構造** [4]：
異なる Poisson 構造をもつ二通りの Hamilton 力学系として定式化できる。これから Liouville-Arnold の意味での「可積分性」に従うことが言える。
7. **厳密解の存在** [5]：
広田の直接法などにより（N-ソリトン解のような）広いクラスの解が厳密に求まるという意味での「可積分性」。
8. **Bäcklund 変換（または Darboux-Crum 変換）の存在** [5]：
これがあれば大体簡単な解から逐次的にソリトン解（やそれに類する解[3]）が構成できる。
9. **Painlevé 性** [6]：
常微分方程式の級数解のもつ「初期値に伴って動く特異点は高々極のみ」という性質のことである。この性質をもつ自明でない２階の常微分方程式を Painlevé 方程式と呼ぶ。

のどれかが成り立てば「可積分」と考えられている[4]ようである [7]。上記の性質の中で有限自由度系の類推から最も素直なものは性質 4 のように思える。しかし実は肝心の初期値問題に関する明言が抜けてしまっている。

[1] 求積とは四則演算・微分・積分・逆関数をとること，つまり微分積分を含まない方程式の解を求める演算のこと。

[2] 筆者は逆散乱法を経由しない Lax 対の構成法を研究課題の一つにしている。

[3] 例えば，ソリトフ（solitoff）解，ドローミオン（dromion）解や筆者が命名した浮き輪ソリトン等.

[4] ちなみに筆者の研究では性質 3, 6, 7 及び 9 を「可積分」の指針にしている。

それでは初期値問題との関連で言えば，**性質 2** が正統的であるように思える。無限自由度の可積分系の内で典型的なソリトン方程式の場合には，例えば，浅水波を記述する Korteweg-de Vries（KdV）方程式[5]

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{3}{2}u\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{4}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\quad (u=u(t,x)), \tag{1}$$

は上記の**性質 1** から **9** の性質が全て満たされていることが知られているが，これはむしろ例外である。ほとんどの可積分系はこれらの性質の内で数個しか満たさない場合がほとんどである。これらの性質が厳密な意味で等価であるかどうかは全く証明されていない。

このように無限次元可積分系といっても，示す性質はバラバラである。これらを統一的に扱う手法はないものか？残念ながら現段階において，完全な意味ではまだそのような手法は確立されていない。しかし部分的でよければ，**佐藤理論**と呼ばれるものが確立している [8]。

佐藤幹夫・泰子両氏はソリトン方程式の代表的な例の一つである Kadomtsev-Petviashvili (KP) 方程式について，高次の保存量を計算した。その結果，無限個の保存量に対応する無限個の時間変数を一斉に考え，解の指標係数を計算すると，KP 方程式はこれらの係数の間の Plucker 関係式に他ならないことを発見した。この考察から，KP 方程式は無限次元のグラスマン多様体上の力学系として捉えることができ，種々のソリトン方程式，種々の特殊解を統一的に理解することが可能になった。これが**佐藤理論**の概略である。この理論ではソリトン方程式（または階層）は**佐藤方程式**に帰着される。

本小論ではこの佐藤方程式を中心に，筆者の最近の研究成果を含めて報告したい。

（注意）本小論タイトルには「**可換空間上の**」と断ってある。この可換空間とは我々が普通イメージしている空間のことである。筆者は最近**非可換空間上の**ソリトン方程式について，濱中 真志氏（東大）と共同研究している。これについては詳しくは別の機会で紹介したい[6]。そのときのタイトルと比較出来るように今回「**可換空間上の**」とわざわざ付けておいた。

2. Lax 方程式

この章では佐藤方程式の導出の準備として，Lax 方程式について紹介する[7] [3]。

[5] 時間変数を t，空間変数を x とする $(1+1)$ 次元偏微分方程式であり，代表的なソリトン方程式の一つである。
[6] 本小論でも第 5 章で簡単に触れている。
[7] 天下り的な紹介ではあるが。

常微分作用素環を

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x)\partial_x^n \tag{2}$$

と定義すると[8]，擬微分作用素環は

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(x)\partial_x^n \tag{3}$$

と定義できる。ここで作用素 ∂_x^{-1} の定義を

$$\partial_x\partial_x^{-1}\equiv 1 \tag{4}$$

とすると[9]，関数 $f=f(t,x,\cdots)$ に対して

$$\begin{aligned}
\partial_x^{-1}f &= f\partial_x^{-1}-f_x\partial_x^{-2}+f_{xx}\partial_x^{-3}-f^{(3)}\partial_x^{-4} \\
&\quad +f^{(4)}\partial_x^{-5}-\cdots && (5)\\
\partial_x^{-2}f &= f\partial_x^{-2}-2f_x\partial_x^{-3}+3f_{xx}\partial_x^{-4} \\
&\quad -4f^{(3)}\partial_x^{-5}+\cdots && (6)\\
\partial_x^{-3}f &= f\partial_x^{-3}-3f_x\partial_x^{-4}+6f_{xx}\partial_x^{-5}+\cdots && (7)\\
\partial_x^{-4}f &= f\partial_x^{-4}-4f_x\partial_x^{-5}+10f_{xx}\partial_x^{-6}+\cdots && (8)
\end{aligned}$$

のように作用することが簡単に確かめられる[10]。

ここで，次のような擬微分作用素

$$L=\partial_x+u_1+u_2\partial_x^{-1}+u_3\partial_x^{-2}+u_4\partial_x^{-3}+\cdots \tag{9}$$

を考える。ここで $u_i=u_i(t,x,\cdots)$ $(i=1,2,3,\cdots)$ とする。ある適当な gauge 変換を用いて，

$$L=\partial_x+u_2\partial_x^{-1}+u_3\partial_x^{-2}+u_4\partial_x^{-3}+\cdots \tag{10}$$

にすることができる[11]。このとき

$$\frac{\partial L}{\partial t_n}=[B_n,L]=B_nL-LB_n \tag{11}$$

を **Lax 方程式**とよぶ。但し，$B_n\equiv(L^n)_{\geq 0}$，すなわち B_n は (L^n) から ∂_x の負巾を取り除いた作用素を意味する。方程式 (11) は **KP 階層（hierarchy）**を与えることが知られている[12]。具体的な例として，KP 方程式と KdV 方程式を KP 階層から導出することを紹介して本章を閉じることにしたい。

[8] この小論では $\partial_x\equiv\frac{\partial}{\partial x}$ とする。
[9] つまり ∂_x が微分作用素で，∂_x^{-1} は適当な境界条件を課した積分作用素である。
[10] この小論では f_x のように添え字はその文字での偏微分を意味する。また同様に $f^{(n)}$ は n 階偏微分を意味している。
[11] ある適当な gauge 変換により，u_1 を残し，u_2 を消すこともできる。このときは modified KP (または modified KdV) 階層を導出できる。
[12] 階層とは高次の保存量を共有する方程式列のことである。

(i) KP 方程式の導出：

(11) において $n=2,3$ より KP 方程式が導出できる。

$$\frac{\partial L}{\partial t_2}=[B_2,L] \tag{12}$$

より，∂_x^{-1} と ∂_x^{-2} の係数を比較すると

$$\frac{\partial u_2}{\partial t_2}=u_{2xx}+2u_{3x} \tag{13}$$

$$\frac{\partial u_3}{\partial t_2}=u_{3xx}+2u_{4x}+2u_2u_{2x} \tag{14}$$

を得る。また

$$\frac{\partial L}{\partial t_3}=[B_3,L] \tag{15}$$

より ∂_x^{-1} の係数を比較すると

$$\frac{\partial u_2}{\partial t_3}=u_{2xxx}+3u_{3xx}+3u_{4x}+6u_2u_{2x} \tag{16}$$

が得られる。(13), (14), (16) において u_3, u_4 を消去し $u_2=u$, $t_2=y$, $t_3=t$ とおくと，方程式 (16) はよく知られた KP 方程式[13]

$$(-4u_t+u_{xxx}+12uu_x)_x+3u_{yy}=0 \quad (u=u(t,x,y)) \tag{17}$$

となる。

(ii) KdV 方程式の導出：

KP 階層に補助条件

$$L^2=B_2 \tag{18}$$

を科すと，**KdV 階層**を導出される。ここでは階層最低次の KdV 方程式 (1) のみ導出することにする。

$$\begin{aligned}L^2 &= L\cdot L\\ &= (\partial_x+u_2\partial_x^{-1}+u_3\partial_x^{-2}+\cdots)\cdot\\ &\quad(\partial_x+u_2\partial_x^{-1}+u_3\partial_x^{-2}+\cdots)\\ &= \partial_x^2+2u_2+(u_{2x}+2u_3)\partial_x^{-1}\\ &\quad+(u_{3x}+2u_4+u_2^2)\partial_x^{-2}+\mathcal{O}(\partial_x^{-3})\end{aligned} \tag{19}$$

より

$$B_2=(L^2)_+=\partial_x^2+2u_2 \tag{20}$$

を得る。但し条件

$$\begin{aligned}u_{2x}+2u_3&=0\\ u_{3x}+2u_4+u_2^2&=0\\ &\vdots\end{aligned} \tag{21}$$

が必要である。上の条件式を見ると u_i が与えられると，u_{i+1} が決まるようになっていることがわかる。よって，真の未知数は u_2 のみである。Lax 方程式 (11) より

$$\frac{\partial L^m}{\partial t_n}=[B_n,L^m] \tag{22}$$

を得る。補助条件 (18) と式 (20) より

$$\frac{\partial L^2}{\partial t_3}=[B_3,L^2] \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial B_2}{\partial t_3}=[B_3,B_2] \tag{23}$$

を得る。ここで

$$B_3=\partial_x^3+3u_2\partial_x+3u_3+3u_{2x} \tag{24}$$

である。$u_2\equiv(1/2)u$ とおくと (23) は KdV 方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t_3}=\frac{1}{4}u_{xxx}+\frac{3}{2}uu_x \tag{25}$$

となる。

3. 佐藤方程式

本章では，Lax 方程式 (11) を書き換えることで佐藤方程式を導出する [9, 10]。

$w_0=w_0(x)$ とする擬微分作用素 L の同値変換

$$L\longmapsto w_0^{-1}Lw_0 \tag{26}$$

を考える。このとき Lax 方程式 (11) の右辺は $w_0^{-1}[B_n,L]w_0$ となる。同値変形より

$$\begin{aligned}L &= w_0^{-1}(x)(\partial_x+u_1+u_2\partial_x^{-1}\cdots)w_0(x)\\ &= \partial_x+w_0^{-1}(x)\big(\partial_xw_0(x)\big)+w_0^{-1}(x)u_1w_0(x)\\ &\quad+\mathcal{O}(\partial_x^{-1})\end{aligned} \tag{27}$$

となる。ここで

$$w_0(x)=\exp(-\int^x u_1(x')dx') \tag{28}$$

とおくと，

$$\partial w_0(x)=-u_1(x)w_0(x) \tag{29}$$

より

$$L=\partial_x+\mathcal{O}(\partial_x^{-1}) \tag{30}$$

を得る。すなわち同値変換により，∂_x^0 の係数は 0 にとれる。もっとうまい変換をとると L は ∂_x だけにすることができる。今 $w_j=w_j(t,x,\cdots)$ $(j=0,1,2,\cdots)$ として，

$$W=1+w_1\partial_x^{-1}+w_2\partial_x^{-2}+\cdots \tag{31}$$

[13] この方程式は元来 x 方向の擾乱を受けたとき，安定かどうかを議論するために提出された方程式である。

なる擬微分作用素を考える。現段階では $w_1, w_2, \cdots$ は未知関数である。このとき

$$L \longmapsto W^{-1}LW = \partial_x \quad \Longrightarrow \quad LW = W\partial_x \tag{32}$$

なる条件を課す。L の中の与えられた関数 u_j に対して，この条件 (32) を満たす関数 w_j を求める。上式 (32) の両辺を比較すると，

$$w_{1x} + u_2 = 0 \tag{33}$$
$$w_{2x} + u_2 w_1 + u_3 = 0 \tag{34}$$
$$w_{3x} + u_2 w_2 - u_2 w_{1x} + u_3 w_1 + u_4 = 0 \tag{35}$$
$$\vdots$$

を得る。これより条件 (32) を満たす関数 w_j を得ることができる。よって，$L \sim \partial_x$ といえる。KP 階層 (11) より

$$\frac{\partial L}{\partial t_n} = [B_n^c, L] \tag{36}$$

を得る。ここで B_n^c は

$$B_n^c \equiv -L^n + B_n = -(L^n)_{\leq 0} \tag{37}$$

で定義される。方程式 (11) と (36) をまとめて記述するために，1-form

$$\Omega \equiv B_1 dt_1 + B_2 dt_2 + \cdots \tag{38}$$
$$\Omega^c \equiv B_1^c dt_1 + B_2^c dt_2 + \cdots \tag{39}$$

を導入する。このとき (11) と (36) は

$$dL = [\Omega, L] = [\Omega^c, L] \tag{40}$$

となる。両辺に d を作用させると

$$\begin{aligned} (0=)d^2L &= d[\Omega, L] = d(\Omega L) - d(L\Omega) \\ &= d\Omega L - \Omega dL - dL\Omega - Ld\Omega \\ &= d\Omega L - \Omega[\Omega, L] - [\Omega, L]\Omega - Ld\Omega \\ &= d\Omega L - \Omega^2 L + L\Omega^2 - Ld\Omega \\ &= (d\Omega - \Omega^2)L - L(d\Omega - \Omega^2) \\ \Longleftrightarrow \quad & d\Omega - \Omega^2 = 0 \end{aligned} \tag{41}$$

を得る。ここで Ω, L はそれぞれ 1-form, 0-form であることと，$\Omega^2 = \Omega \wedge \Omega$ を用いた。同様に

$$d\Omega^c - (\Omega^c)^2 = 0 \tag{42}$$

を得る。(41), (42) の左辺を曲率形式といいそれが 0 となる (41), (42) を零曲率表示という。

次に W の満たす方程式を求める。ここで得られる方程式が佐藤方程式である。(32) より

$$\begin{aligned} dL &= d(W\partial_x W^{-1}) \\ &= (dW)\partial_x W^{-1} + W\partial_x (dW^{-1}) \\ &= [dWW^{-1}, L] \end{aligned} \tag{43}$$

を得る。(40) より上式は

$$\begin{aligned} & [dWW^{-1}, L] = [\Omega^c, L] \\ \Longleftrightarrow \quad & [dWW^{-1} - \Omega^c, L] = 0 \\ \overset{(32)}{\Longleftrightarrow} \quad & (dWW^{-1} - \Omega^c)(W\partial_x W^{-1}) \\ & -(W\partial_x W^{-1})(dWW^{-1} - \Omega^c) = 0 \end{aligned} \tag{44}$$

となる。上式の左から W^{-1}, 右から W をかけると

$$\begin{aligned} & \left(W^{-1}(dWW^{-1} - \Omega^c)W\right)\partial_x \\ & -\partial_x \left(W^{-1}(dWW^{-1} - \Omega^c)W\right)\partial_x = 0 \\ \Longleftrightarrow \quad & [W^{-1}(dWW^{-1} - \Omega^c)W, \partial_x] = 0 \\ \Longleftrightarrow \quad & [\Theta, \partial_x] = 0 \\ \Longleftrightarrow \quad & \frac{d\Theta}{dx} = 0 \end{aligned} \tag{45}$$

を得る。但し，

$$\Theta \equiv W^{-1}(dWW^{-1} - \Omega^c)W \tag{46}$$

である。(45) は Θ が t_j のみの関数であることを表している。また Θ を用いた (11) と等価な式として，次の零曲率表示

$$d\Theta + \Theta \wedge \Theta = 0 \tag{47}$$

が得られる。ここで pure-gauge 変換 C より

$$\Theta = -dCC^{-1} \tag{48}$$

と書ける。よって

$$W^{-1}(dWW^{-1} - \Omega^c)W = -dCC^{-1} \tag{49}$$

を得る。更に $W \to WC$ なる gauge 変換より

$$(WC)^{-1}\left(d(WC)(WC)^{-1} - \Omega^c\right)(WC) = 0 \tag{50}$$

となる。なお，ここでの議論は **Appendix** を見よ。今改めて $WC = W$ と書く，すなわち gauge fixing を行うと

$$\begin{aligned} & W^{-1}(dWW^{-1} - \Omega^c)W = 0 \\ \Longleftrightarrow \quad & dW = \Omega^c W \end{aligned} \tag{51}$$

と書ける。これを成分で書き表すと

$$\sum_n \frac{\partial W}{\partial t_n}dt_n = \sum_n B_n^c W dt_n$$

$$\iff \frac{\partial W}{\partial t_n} = B_n^c W = (-L^n + B_n)W = B_nW - L^nW \qquad (52)$$

となる。ここで

$$L^n = (W\partial_x W^{-1})^n = W\partial_x W^{-1}\cdots W\partial_x W^{-1} = W\partial_x^n W^{-1} \qquad (53)$$

より，上式は

$$\frac{\partial W}{\partial t_n} = B_nW - W\partial_x^n \qquad (54)$$

となる。この方程式が佐藤方程式である。

佐藤方程式 (54) をもう少し使い易くなるように変形していく。

$$\frac{\partial W}{\partial t_n} = \left(W\partial_x^n W^{-1} - (W\partial_x^n W^{-1})_{\leq -1}\right)W - W\partial_x^n = -(W\partial_x^n W^{-1})_{\leq -1}W \qquad (55)$$

と変形し，擬微分作用素 W (31) が有限項

$$W = 1 + w_1\partial_x^{-1} + w_2\partial_x^{-2} + \cdots + w_m\partial_x^{-m} \qquad (56)$$

で切れていると仮定する。演算子 $\widetilde{W}$ $(\equiv W\partial_x^m)$ を導入すると，佐藤方程式 (54) は

$$\frac{\partial_x \widetilde{W}}{\partial_x t_n} = B_n\widetilde{W} - \widetilde{W}\partial_x^n \qquad (57)$$

と書き直すことができる。これも佐藤方程式と呼ばれる。上式より

$$\widetilde{W}\partial_x^n = B_n\widetilde{W} + (\widetilde{W}\partial_x^n\widetilde{W}^{-1})_{\leq -1}\widetilde{W} \qquad (58)$$

を得る。ここで少し具体的な例を紹介する。佐藤方程式 (57) において，$m=1$ とおくことにより Burgers 方程式が導出されることを示したい。$m=1$ より

$$\widetilde{W} = W\partial_x = (1 + w_1\partial_x^{-1})\partial_x = \partial_x + w_1$$

$$\overset{(32)}{\iff} \quad LW = \partial_x + w_1 \qquad (59)$$

となる。t_2-flow, すなわち独立変数 t_2 に関する佐藤方程式 (57)

$$\frac{\partial \widetilde{W}}{\partial t_2} = B_2\widetilde{W} - \widetilde{W}\partial_x^2$$

$$\iff \frac{\partial(\partial_x + w_1)}{\partial t_2} = B_2(\partial_x + w_1) - (\partial_x + w_1)\partial_x^2 \qquad (60)$$

を計算する。ここで

$$(\partial_x + w_1)\partial_x^2 = (\partial_x^2 - 2w_{1x})(\partial_x + w_1) + 2w_{1x}w_1 - w_{1xx} \qquad (61)$$

より，上式は

$$\frac{\partial w_1}{\partial t_2} = B_2(\partial_x + w_1) - (\partial_x^2 - 2w_{1x})(\partial_x + w_1) - 2w_{1x}w_1 + w_{1xx} \qquad (62)$$

となる。$LW = \partial_x + w_1$ の左辺を計算すると，

$$(\partial_x + u_2\partial_x^{-1} + \cdots)(1 + w_1\partial_x{-1}) = \partial_x + w_1$$

$$\iff \partial_x + w_1 + (w_{1x} + u_2)\partial_x^{-1} + (w_1u_2 + u_3)\partial_x^{-2} + \cdots = \partial_x + w_1 \qquad (63)$$

となり，∂_x^j で両辺を比較すると

$$w_{1x} + u_2 = 0$$
$$w_1u_2 + u_3 = 0$$
$$\vdots$$

を得る。よって $B_2 = \partial_x^2 + 2u_2 = \partial_x^2 - 2w_{1x}$ となり，先の方程式は

$$\frac{\partial w_1}{\partial t_2} = -2w_{1x}w_1 + w_{1xx} = (w_{1x} - w_1^2)_x \qquad (64)$$

となる。これは Burgers 方程式である。Cole-Hopf 変換

$$w_1 = -\partial_x(\log\psi) \qquad (65)$$

より，上式 (64) は

$$\psi_{t_2} = \psi_{xx} \qquad (66)$$

と変換される。

4. 佐藤方程式の解法

佐藤方程式 (57) の初期値問題について考える。$t=0$ において

$$\widetilde{W} = \partial_x^m + w_1\partial_x^{m-1} + w_2\partial_x^{m-2} + \cdots + w_m \qquad (67)$$

を用いた常微分方程式

$$\widetilde{W}\phi(x) = 0 \qquad (68)$$

は m 個の 1 次独立な解，すなわち $t=0$ の基本解系 $\{\phi_1(x), \cdots$ 及び $\phi_m(x)\}$ を持つとする。各々の Talyor 展開の係数

$$\frac{d^\nu\phi_j}{dx^\nu}\Big|_{x=0} \equiv \xi_\nu^{(j)} \qquad (69)$$

を成分とする $\infty \times m$-matrix を

$$\Xi = \left(\begin{array}{cccc} \xi_0^{(1)} & \xi_0^{(2)} & \cdots & \xi_0^{(m)} \\ \xi_1^{(1)} & \xi_1^{(2)} & \cdots & \xi_1^{(m)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \xi_{m-1}^{(1)} & \xi_{m-1}^{(2)} & \cdots & \xi_{m-1}^{(m)} \\ \hline \xi_m^{(1)} & \xi_m^{(2)} & \cdots & \xi_m^{(m)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{array}\right) \tag{70}$$

を考える。Ξ のランクは m である。Ξ は方程式

$$\widetilde{W}\left(1, \frac{x}{1!}, \frac{x^2}{2!}, \cdots\right)\Xi = 0 \tag{71}$$

を満たす。ここで複素正則行列の元 R $(\in GL(m, \mathrm{c}))$ を考えると，ΞR も方程式 (71) を満たす。例えば

$$R = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \cdots & \eta_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_m & \cdots & \eta_m \end{pmatrix} \tag{72}$$

とするとき，

$$\begin{aligned} 0 &= \widetilde{W}\left(1, \frac{x}{1!}, \frac{x^2}{2!}, \cdots\right)\Xi R \\ &= \widetilde{W}(\phi_{1(x)}\alpha_1 + \cdots + \phi_{m(x)}\alpha_1, \cdots, \\ &\qquad \phi_{1(x)}\eta_1 + \cdots + \phi_{m(x)}\eta_1) \end{aligned} \tag{73}$$

である。よって，R をかけても (71) が満たされることがわかる。したがって Ξ は

$$\Xi \in \{\infty \times m \ \text{ matrix of rank } m\}/GL(m, \mathbf{c}) \tag{74}$$

と表せる。これを普遍グラスマン多様体 $GM(m, \infty)$ という。次に shift 作用素を定義する。そのために

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \text{\huge 0} \\ & 0 & 1 & & \\ & & 0 & 1 & \\ \text{\huge 0} & & & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \tag{75}$$

を導入すると，shift 作用素 $H(x)$ は

$$\begin{aligned} H(x) &\equiv \exp(x\Lambda) \\ &= 1 + x\Lambda + \frac{x^2}{2!}\Lambda^2 + \cdots \\ &= \begin{pmatrix} 1 & x & \frac{x^2}{2!} & \frac{x^3}{3!} & \cdots \\ & 1 & x & \frac{x^2}{2!} & \cdots \\ & & 1 & x & \cdots \\ & & & 1 & \cdots \\ \text{\huge 0} & & & & \ddots \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{76}$$

と定義できる。また

$$\exp(x\Lambda)\Xi = \begin{pmatrix} \phi_1 & \cdots & \phi_m \\ \partial_x\phi_1 & \cdots & \partial_x\phi_m \\ \partial_x^2\phi_1 & \cdots & \partial_x^2\phi_m \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \tag{77}$$

となる。ここで方程式 (68) より

$$\begin{pmatrix} \partial_x^{m-1}\phi_1 & \cdots & \phi_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \partial_x^{m-1}\phi_m & \cdots & \phi_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\partial_x^m\phi_1 \\ \vdots \\ -\partial_x^m\phi_m \end{pmatrix} \tag{78}$$

を得るので，w_j について解くと

$$w_j = \frac{\begin{vmatrix} \partial_x^{m-1}\phi_1 & \cdots & -\partial_x^m\phi_1 & \cdots & \phi_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \partial_x^{m-1}\phi_m & \cdots & -\partial_x^m\phi_m & \cdots & \phi_m \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \partial_x^{m-1}\phi_1 & \cdots & \partial_x^{m-j}\phi_1 & \cdots & \phi_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \partial_x^{m-1}\phi_m & \cdots & \partial_x^{m-j}\phi_m & \cdots & \phi_m \end{vmatrix}} \tag{79}$$

となる。(79) より $\widetilde{W}\phi(x)$ は

$$\widetilde{W}\phi(x) = \frac{\begin{vmatrix} \phi_1 & \cdots & \phi_m & \phi \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ \partial_x^{m-1}\phi_1 & \cdots & \partial_x^{m-1}\phi_m & \partial_x^m\phi \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \phi_1 & \cdots & \phi_m \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \partial_x^{m-1}\phi_1 & \cdots & \partial_x^{m-1}\phi_m \end{vmatrix}} \tag{80}$$

と表すことができる。$\phi = \phi_j (j = 1, 2, \cdots, m)$ なので，上式より $\widetilde{W}\phi(x) = 0$ を得る。ここで (80) の分母は τ 関数と呼ばれるものである。w_j は t_1, t_2, $\cdots$ の関数なので ϕ_j は

$$\phi_j = \phi_j(x; t) = \phi_j(x, t_1, t_2, \cdots) \tag{81}$$

となる。(76) は $H(x; t)$ として，時間発展

$$H(x; t) = \exp(x\Lambda)\exp\big(\eta(x, \Lambda)\big)\Xi, \tag{82}$$

$$\eta(x, \Lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} t_n\Lambda^n \tag{83}$$

できる。ここで

$$\begin{aligned} &\exp(x\Lambda)\exp\big(\eta(x, \Lambda)\big) \\ &= \exp\big((x + t_1)\Lambda + t_2 + \Lambda^2 + t_3\Lambda^3 + \cdots\big) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} P_n\Lambda^n \end{aligned} \tag{84}$$

より P_n を定義すると

$$P_n(x+t_1,t_2,t_3,\cdots) = \sum_{\{\substack{\nu_0+\nu_1+2\nu_2+3\nu_3+\cdots=n \\ \nu_0,\nu_1,\nu_2,\nu_3,\cdots\geq 0}\}} \frac{x^{\nu_0}t_1^{\nu_1}t_2^{\nu_2}\cdots}{\nu_0!\nu_1!\nu_2!\cdots} \tag{85}$$

を得る。ここで $n=0,1,2,3$ についてみると

$$P_0 = 1 \tag{86}$$

$$P_1 = x + t_1 \tag{87}$$

$$P_2 = \frac{1}{2}(x+t_1)^2 + t_2 \tag{88}$$

$$P_3 = \frac{1}{6}(x+t_1)^3 + (x+t_1)t_2 + t_3 \tag{89}$$

$$\vdots$$

である。上の多項式は

$$\frac{\partial P_n}{\partial x} = P_{n-1}, \tag{90}$$

$$\frac{\partial P_n}{\partial t_m} = P_{n-m} \quad (n<0 \text{ のとき } P_n = 0) \tag{91}$$

なる性質を持っている。これらより

$$H(x;t) = \exp\bigl((x+t_1)\Lambda + t_2\Lambda^2 + \cdots\bigr)\Xi = \begin{pmatrix} 1 & P_1 & P_2 & P_3 & \cdots \\ & 1 & P_1 & P_2 & \cdots \\ & & 1 & P_1 & \cdots \\ & & & 1 & \cdots \\ \mathbf{0} & & & & \ddots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \xi_0^{(1)} & \xi_0^{(2)} & \cdots & \xi_0^{(m)} \\ \xi_1^{(1)} & \xi_1^{(2)} & \cdots & \xi_1^{(m)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \xi_{m-1}^{(1)} & \xi_{m-1}^{(2)} & \cdots & \xi_{m-1}^{(m)} \\ \hline \xi_m^{(1)} & \xi_m^{(2)} & \cdots & \xi_m^{(m)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \tag{92}$$

を得る。上式の左辺を

$$\begin{pmatrix} h_0^{(1)}(x;t) & h_0^{(2)}(x;t) & \cdots & h_0^{(m)}(x;t) \\ h_1^{(1)}(x;t) & h_1^{(2)}(x;t) & \cdots & h_1^{(m)}(x;t) \\ h_2^{(1)}(x;t) & h_2^{(2)}(x;t) & \cdots & h_2^{(m)}(x;t) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \tag{93}$$

とおくと，

$$h_0^{(j)}(x;t)|_{t=0} = \xi_0^{(j)} + \frac{x}{1!}\xi_1^{(j)} + \frac{x^2}{2!}\xi_2^{(j)} + \cdots = \phi_j(x) \tag{94}$$

である。よって $h_0^{(j)}$ は $\widetilde{W}\phi = 0$ の基本解となっている。また，

$$h_n^{(j)}(x;t) = \frac{\partial h_0^{(j)}}{\partial t_n} = \frac{\partial^n h_0^{(j)}}{\partial x^n} \tag{95}$$

でもある。

5. 佐藤方程式の拡張について

佐藤方程式にはさまざま拡張がある。本章では筆者が研究している拡張に絞って簡単に報告する。

(1) ソリトン階層：

次の形の擬微分作用素 W

$$W = 1 + v_1\partial_x^{-1} + v_2\partial_x^{-2} + \cdots \qquad (v_i \in R) \tag{96}$$

を**波動作用素**と呼ぶことにする。さらに，次の関数 $\Psi \in R((w))e^{\xi}$

$$\Psi = W(w^{-1}e^{\xi}) = (1 + v_1 w + v_2 w^2 + \cdots)w^{-1}e^{\xi} \tag{97}$$

を W に対応する**波動関数**と呼ぶ。すぐ後で定義する階層は全て W, Ψ もしくは $v_1, v_2, \cdots$ に関する無限連立の非線形偏微分方程式系である。

ソリトン階層の定義のため、少し文字の準備をしておく。W は波動作用素であるとし，$\Psi = W(w^{-1}e^{\xi})$ は対応する波動関数であるとする。

$$L = W\partial W^{-1}, \quad P = L^{\ell} = W\partial^{\ell}W^{-1},$$
$$Q = W_y W^{-1}, \quad \lambda = w^{-\ell},$$
$$B_{i,\pm} = (L^i)_{\pm}, \; C_{j,\pm} = (QP^j)_{\pm} \tag{98}$$

ここで，添え字の正符号は >0, 添え字の負符号は <0 かつ $W_y = \dfrac{\partial W}{\partial y}$ とする。これらの定義から次の等式

$$L\Psi = w^{-1}\Psi, \qquad P\Psi = \lambda\Psi, \qquad \frac{\partial \Psi}{\partial y} = Q\Psi. \tag{99}$$

がすぐに出る。このとき KP 階層, ℓ-KdV 階層と ℓ-CBS 階層はそれぞれ以下のように定義される。

(a) **KP 階層 (KP hieraechy)**

KP 階層とは v_n たちに関する次の偏微分方程式系

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t_n} = B_{n,+}\Psi \qquad (n = 1,2,3,\cdots) \tag{100}$$

のことである。

(b) **ℓ-KdV 階層 (ℓ-KdV hieraechy)**

ℓ-KdV 階層とは KP 階層に ℓ-reduction の条件を加えた方程式系のことである。条件 $B_{\ell,-} = 0$ と同値であり，更に $B_{n\ell,-} = 0$ $(n = 1,2,3,\cdots)$ とも同値であることに注意せよ。

(c) **ℓ-CBS 階層**[14] **(ℓ-CBS hieraechy)**

ℓ-CBS 階層とは ℓ-KdV 階層に次を加えた方程式系

$$\left(\frac{\partial}{\partial s_j}+\lambda^j\frac{\partial}{\partial y}\right)\Psi=C_{j,+}\Psi \qquad (j=0,1,2,\cdots) \tag{101}$$

のことである。この CBS 階層とは 最低次の方程式が CBS 方程式

$$u_t=\frac{1}{4}u_{xxy}+uu_y+\frac{1}{2}u\partial_x^{-1}u_y \qquad (u=u(t,x,y)) \tag{102}$$

であるような階層のことである。

各階層の解になっているような波動関数をその階層の波動関数と呼ぶことにする。

(2)　非可換空間上のソリトン方程式：

最近

$$[x^i,\ x^j]=i\theta^{ij}, \qquad (\theta^{ij}>0) \tag{103}$$

で定義される**非可換空間**における物理学（量子力学, 場の理論, D-branc 等）が精力的に研究されている。このとき非可換空間上の場の関数の積は $\star$ 積（または Moyal 積）

$$f\star g(x)\equiv \exp\eta f(x')g(x'')\Big|_{x'=x''=x,} \tag{104}$$

$$\eta\equiv\frac{i}{2}\theta^{ij}\partial_i^{(x')}\partial_j^{(x'')} \tag{105}$$

に変形されている[15]。ここで $\partial_i\equiv\dfrac{\partial}{\partial x_i}$ かつ $\partial_j\equiv\dfrac{\partial}{\partial x_j}$ である。

ソリトン方程式についても非可換空間への拡張が報告されている [11, 12]。例えば 非可換ソリトン方程式はそれぞれ

- 非可換 Burgers 方程式：

$$\begin{aligned}u_t &= \alpha u_{xx}+(1-\alpha-\beta)u\star u_x\\ &\quad +(1+\alpha-\beta)u_x\star u,\end{aligned} \tag{106}$$

但し α と β は任意定数である。

- 非可換 KdV 方程式：

$$u_t=\frac{1}{4}u_{xxx}+\frac{3}{4}(u\star u)_x, \tag{107}$$

- 非可換 Boussinesq 方程式：

$$\begin{aligned}u_t &= \frac{1}{4}u_{xxt}+\frac{1}{2}(u\star u)_t\\ &\quad +\frac{1}{4}\left(u\star(\partial_x^{-1}u_t)+(\partial_x^{-1}u_t)\star u\right)_x\\ &\quad +\frac{1}{4}\left[u,\partial_x^{-1}\left([u,\partial_x^{-1}u_t]_\star\right)\right]_\star\end{aligned} \tag{108}$$

- 非可換 KP 方程式：

$$\begin{aligned}u_t &= \frac{1}{4}u_{xxx}+\frac{3}{4}(u\star u)_x+\frac{3}{4}\partial_x^{-1}u_{yy}\\ &\quad +\frac{3}{4}[u,\partial_x^{-1}u_y]_\star,\end{aligned} \tag{109}$$

- 非可換 CBS 方程式：

$$\begin{aligned}u_t &= \frac{1}{4}u_{xxz}+\frac{1}{2}(u\star u)_z\\ &\quad +\frac{1}{4}\left(u\star(\partial_x^{-1}u_z)+(\partial_x^{-1}u_z)\star u\right)_x\\ &\quad +\frac{1}{4}\left[u,\partial_x^{-1}\left([u,\partial_x^{-1}u_z]_\star\right)\right]_\star,\end{aligned} \tag{110}$$

である。但し $[f,g]_\star\equiv f\star g-g\star f$, $\partial_x^{-1}f(t,x):=\int^x dx'f(t,x')$ である。

そしてこれらの佐藤方程式つまり**非可換空間上の佐藤方程式**についても最近研究されている。これらのことは次の機会に詳しく報告するつもりである。

6. 結言

本小論では, 無限次元可積分系の代表であるソリトン方程式をある程度統一的に扱える佐藤方程式について紹介した。またその拡張についての研究成果を, 簡単ではあるが, 著者の研究を中心に紹介した。しかし紙数の制約から, 佐藤理論の研究動機となった広田良吾氏の非常に独創的な研究成果である**ソリトン方程式の双線形形式** [5] にまったく触れることが出来なかった。また佐藤理論に深く関連している研究トピックスである **無限次元 Lie 環による表現** [13], **Constrained 系への拡張**, **非整数階微分への拡張** 及び **離散化**などにも触れることが出来なかった。非常に心残りである。

---

[14] Calogero-Bogoyavlenskii-Schiff 階層の略。
[15] $\theta\to 0$ で可換空間にリダクションされる。

Appendix： gauge変換について

(33), (34), (35) 及び (36) を w_j についての1階の線形常微分方程式とみると, 積分定数の不定性は残る。しかし, それはちょうど0階の x に依らない変数を係数にもつ擬微分作用素

$$C = 1 + C_1(t)\partial_x^{-1} + C_2(t)\partial_x^{-2} + \cdots \tag{111}$$

によって W を WC に変える自由度に対応している。なぜなら上式より $C\cdot\partial_x = \partial_x\cdot C$ となるので

$$W^{-1}LW = \partial_x \tag{112}$$

が成立するならば,

$$\begin{aligned}(WC)\partial_x(WC)^{-1} &= (WC)\partial_x(C^{-1}W^{-1}) \\ &= W\partial_x W^{-1} = L \end{aligned} \tag{113}$$

となる。これより不定性は変換 $W \to WC$ への自由度に対応していることがわかる。この変換はゲージ変換に対応する。また

$$d\Theta + \Theta \wedge \Theta = 0 \tag{114}$$

が可積分条件を満たし, $\Theta = -dCC^{-1}$ と書ける。

参考文献

[1] この定理についての文献はいろいろある。ここでは可積分系について詳しく論述しているものを紹介しておく：大貫 義郎・吉田 春夫,「力学」(岩波講座現代の物理学１), 岩波書店, (1994), pp.234.

[2] C. S. Gardner, J. M. Greene, M. D. Kruskal and R. M. Miura: *Phys. Rev. Lett.* **19**, (1967), pp.1095-1097.

[3] P. D. Lax: *Commun. Pure Appl. Math.* **21**, (1968), pp.467-490.

[4] M. Blaszak:「*Multi-Hamiltonian Theory of Dynamical Systems*」, Springer-Verlag, (1998), pp.350.

[5] 広田 良吾:「直接法によるソリトンの数理」, 岩波書店, (1992), pp.202.

[6] Painlevé 性についての文献もいろいろある。代表的なものを挙げておく：

- 岡本 和夫:「パンルヴェ方程式序説」(上智大学数学講究録 N0. 19), 上智大学数学教室, (1985), pp.274,
- 川原 琢治:「ソリトンからカオスへ」, 朝倉書店, (1993), pp.214,
- R. Conte（編）:「*The Painlevé Property*」, Springer-Verlag, (2000), pp.810,
- 戸田 晃一: Painlevé 性–可積分判定法という観点から–, 慶應義塾大学日吉紀要自然科学, 慶應義塾出版会, **32**, (2002), pp.1-37.

[7] これらの定義についての文献もいろいろある. 代表的なものを挙げておく：

- V. E. Zakharov (編) :「What Is Integrability?」, Springer-Verlag, (1990), pp.321,
- 和達 三樹:「非線形波動」(岩波講座現代の物理学１４), 岩波書店, (1992), pp.233.

[8] 梅田 亨（記）: 佐藤幹夫講義録（数理解析レクチャー・ノート５）, 数理解析レクチャー・ノート刊行会, (1989), pp.576.

[9] 村瀬 元彦：ソリトンの代数的側面,「別冊 数理科学 ソリトン」, サイエンス社, (1985) pp.127-143.

[10] Y. Ohta, J. Satsuma, D. Takahashi and T. Tokihiro: Progr. Theor. Phys. Suppl. **94** (1988) pp.210-240.

[11] K. Toda：“Extensions of soliton equations to non-commutative (2 + 1) dimensions,” Workshop on Integrable Theories, Solitons and Duality, Sao Paulo, Brazil, 1-6 July 2002.

[12] M. Hamanaka and K. Toda： `hepth/0211148` 及び その参考文献.

[13] 三輪 哲二, 神保 道夫, 伊達 悦朗：ソリトンの数理（岩波講座 応用数学４）, 岩波書店, (1993), pp.112.