

確率 KdV 方程式に対するエネルギー保存差分法

石森 勇次

(工学部教養教育)

確率 KdV 方程式に対して、エネルギーと共役な正準変数および拡張されたエネルギー汎関数を導入し、拡張されたエネルギー汎関数が保存される差分法を構成する。また、この差分法を用いたソリトン解の数値計算を行う。

キーワード：確率偏微分方程式，差分法，エネルギー保存，KdV 方程式，ソリトン解

1. はじめに

確率微分方程式で記述される力学系の数値計算法として、系のエネルギー関数の性質を満たすような差分法を考える。即ち、保存力学系に対しては、エネルギー関数が一定の値を取ることを保証するような差分法を、また、散逸力学系に対しては、エネルギー関数が時間の経過とともに減少することを保証するような差分法を考える。すでに、確率ハミルトン力学系に対してエネルギー保存差分法を提案したが [1]、本論文では確率 KdV 方程式 [2] を例として確率偏微分方程式のエネルギー保存差分法を考える。

2 節では、確率 KdV 方程式とは何かを説明し、拡張されたエネルギー関数を導入する。また、エネルギー保存則を説明する。3 節では、エネルギー保存差分法を構成する。4 節では、実際の数値計算例を示す。

2. 拡張されたエネルギー汎関数

2.1 確率 KdV 方程式

確率偏微分方程式として、確率 KdV 方程式 [2]

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 6u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = \eta(t) \quad (1)$$

を考える。ここで、 $u = u(x, t)$ 。また、 $\eta(t)$ はランダムなノイズ (確率変数) で、

$$\langle \eta(t) \rangle = 0 \quad (2)$$

$$\langle \eta(t_1) \eta(t_2) \rangle = 2\epsilon \delta(t_1 - t_2) \quad (3)$$

である。 $\langle \dots \rangle$ は平均 (または期待値) を表す。 $\eta(t)$ は

ウィナー過程 $W(t)$:

$$\langle W(t) \rangle = 0 \quad (4)$$

$$\langle W(t_1) W(t_2) \rangle = 2\epsilon \min(t_1, t_2) \quad (5)$$

に対して、形式的に

$$\eta(t) = \frac{dW(t)}{dt} \quad (6)$$

である。確率 KdV 方程式 (1) の解 $u(x, t)$ はウィナー過程 $W(t)$ または $\eta(t)$ の汎関数として求められる。

ところで、確率 KdV 方程式 (1) は重要な特徴を持っている。すなわち、ガリレイ変換 [2]

$$u(x, t) = U(X, T) + W(t) \quad (7)$$

$$X = x - 6 \int_0^t W(t') dt', \quad T = t \quad (8)$$

によって、ノイズ $\eta(t)$ の無い KdV 方程式

$$\frac{\partial U}{\partial T} + 6U \frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial^3 U}{\partial X^3} = 0 \quad (9)$$

に変換される。KdV 方程式 (9) は可積分方程式でありソリトン解などの厳密解が知られている [2]。したがって、数値計算のテスト方程式として良い方程式である。

2.2 拡張されたエネルギー汎関数

確率 KdV 方程式 (1) は、エネルギー汎関数 H :

$$H = \int_0^L \mathcal{H}(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \eta(t)) dx \quad (10)$$

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 - u^3 + x \eta(t) u \quad (11)$$

に対して

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta u} \quad (12)$$

$$\frac{\delta}{\delta u} = \frac{\partial}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial (\frac{\partial u}{\partial x})} + \dots \quad (13)$$

のように表される。ここで、 L は系の長さで、周期的境界条件

$$u(x + L, t) = u(x, t) \quad (14)$$

が成り立つものとする。

正準共役な変数 $r(x, t)$ (一般化運動量), $s(x, t)$ (一般化座標) を導入し、エネルギー汎関数 H を

$$H_{\text{ex}} = \int_0^L \mathcal{H}_{\text{ex}}(u, \frac{\partial u}{\partial x}, r, s) dx \quad (15)$$

$$\mathcal{H}_{\text{ex}} = r + \mathcal{H}(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \eta(s)) \quad (16)$$

のように拡張する。このとき、 u, r, s に対する偏微分方程式は

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\delta \mathcal{H}_{\text{ex}}}{\delta u} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta u} \quad (17)$$

$$\frac{\partial r}{\partial t} = - \frac{\delta \mathcal{H}_{\text{ex}}}{\delta s} = - \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta s} \quad (18)$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \frac{\delta \mathcal{H}_{\text{ex}}}{\delta r} = 1 \quad (19)$$

となる。(19) より $s = t$ と選べるので (17) の解 $u(x, t)$ は (12) (したがって (1)) の解と同じである。

偏微分方程式系 (17)-(19) は自励系であるから

$$\begin{aligned} & \frac{dH_{\text{ex}}}{dt} \\ &= \int_0^L \left(\frac{\partial r}{\partial t} + \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta u} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta s} \frac{\partial s}{\partial t} \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^L \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta u} \right)^2 dx = 0 \end{aligned} \quad (20)$$

となり、拡張されたエネルギー汎関数 H_{ex} は保存する。

3. エネルギー保存差分法

差分法を先ず空間変数 x の離散化を行い、次に時間変数 t の離散化を行う手順で構成する。

3.1 空間変数の離散化

空間変数 x を

$$x_m = m\Delta x \quad (m = 0, 1, 2, \dots, N) \quad (21)$$

のように離散化する。ここで、 Δx は x の刻み幅で $L = N\Delta x$ である。格子点 $x = x_m$ 上の関数 f を

$$f_m(t) = f(x_m, t) \quad (22)$$

とおく。このとき、拡張されたエネルギー関数 H_{ex} は次のように近似される。

$$H_{\text{ex}} = \bar{H}_{\text{ex}} \Delta x + O[\Delta x^2] \quad (23)$$

$$\bar{H}_{\text{ex}} = \sum_{m=0}^{N-1} r_m + \bar{\mathcal{H}}, \quad \bar{\mathcal{H}} = \sum_{m=0}^{N-1} \mathcal{H}_m \quad (24)$$

$$\mathcal{H}_m = \frac{1}{2} \left(\frac{u_{m+1} - u_m}{\Delta x} \right)^2 - u_m^3 + x_m \eta u_m \quad (25)$$

ここで、

$$\frac{\delta \bar{H}_{\text{ex}}}{\delta u} = \frac{\partial \bar{\mathcal{H}}_{\text{ex}}}{\partial u_m} + O[\Delta x^2] \quad (26)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f_{m+1} - f_{m-1}}{2\Delta x} + O[\Delta x^2] \quad (27)$$

に注意すると、誤差を $O[\Delta x^2]$ として、偏微分方程式系 (17)-(19) は常微分方程式系

$$\frac{du_m}{dt} = \frac{1}{2\Delta x} \left(\frac{\partial \bar{\mathcal{H}}_{\text{ex}}}{\partial u_{m+1}} - \frac{\partial \bar{\mathcal{H}}_{\text{ex}}}{\partial u_{m-1}} \right) \quad (28)$$

$$\frac{dr_m}{dt} = - \frac{\partial \bar{\mathcal{H}}_{\text{ex}}}{\partial s_m} \quad (29)$$

$$\frac{ds_m}{dt} = \frac{\partial \bar{\mathcal{H}}_{\text{ex}}}{\partial r_m} = 1 \quad (30)$$

で近似される。連続空間変数の場合と同様に、(30) より $s_m = t$ と選べる。

常微分方程式系 (28)-(30) に対して、

$$\begin{aligned} & \frac{d\bar{H}_{\text{ex}}}{dt} \\ &= \sum_{m=0}^{N-1} \left(\frac{\partial \bar{\mathcal{H}}_{\text{ex}}}{\partial u_m} \frac{du_m}{dt} + \frac{\partial \bar{\mathcal{H}}_{\text{ex}}}{\partial r_m} \frac{dr_m}{dt} + \frac{\partial \bar{\mathcal{H}}_{\text{ex}}}{\partial s_m} \frac{ds_m}{dt} \right) \\ &= \frac{1}{2\Delta x} \sum_{m=0}^{N-1} \left(\frac{\partial \bar{\mathcal{H}}_{\text{ex}}}{\partial u_m} \frac{\partial \bar{\mathcal{H}}_{\text{ex}}}{\partial u_{m+1}} - \frac{\partial \bar{\mathcal{H}}_{\text{ex}}}{\partial u_{m-1}} \frac{\partial \bar{\mathcal{H}}_{\text{ex}}}{\partial u_m} \right) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (31)$$

となり、エネルギー保存則が成り立つ。

3.2 時間変数の離散化 (差分スキーム)

時間変数 t を離散化して差分スキームを構成する。時間変数 t を

$$t^k = k\Delta t \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (32)$$

のように離散化する。ここで、 Δt は t の刻み幅である。また、格子点 $t = t^k$ 上の関数 f を

$$f^k = f(t^k) \quad (33)$$

とおく。

離散時間系でエネルギー保存則が成り立つ鍵は、連続時

間系のチェーンルール

$$F = F(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (34)$$

$$x_i = x_i(t) \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (35)$$

$$\frac{dF}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} \quad (36)$$

の差分化である [1].

関数 F^k を l 個の点

$$t^k, t^{k-1}, \dots, t^{k-l+1} \quad (l \geq n)$$

で次のように平均化する。

$$\mu_{x_1, \dots, x_n}^{<l>} F^k = \frac{1}{l!} [\text{per } M] F^k \quad (37)$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 \\ E_1^{-1} & E_2^{-1} & \dots & E_n^{-1} & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ E_1^{-l+1} & E_2^{-l+1} & \dots & E_n^{-l+1} & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad (38)$$

$$E_i^j F(\dots, x_i^k, \dots) = F(\dots, x_i^{k+j}, \dots) \quad (39)$$

このとき、離散時間系のチェーンルール

$$\frac{\Delta [\mu_{x_1, \dots, x_n}^{<l>} F^k]}{\Delta t} = \sum_{i=1}^n \delta_{x_i}^{1,1-l} \mu_{\dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots}^{<l-1>} F^k \frac{\Delta^{1,1-l} x_i^k}{l \Delta t} \quad (40)$$

が成り立つ。ここで、

$$\Delta^{a,b} f^k = f^{k+a} - f^{k+b} \quad (41)$$

$$\Delta = \Delta^{1,0} \quad (42)$$

$$\delta_{x_i}^{a,b} F^k = \frac{(E_i^a - E_i^b) F^k}{\Delta^{a,b} x_i^k} \quad (43)$$

である。

したがって、常微分方程式系 (28)-(30) の差分化として差分方程式系

$$\frac{\Delta^{1,1-l} u_m^k}{l \Delta t} = \frac{1}{2 \Delta x} \times \left[\delta_{u_{m+1}}^{1,1-l} \mu_{\dots, u_m, u_{m+2}, \dots}^{<l-1>} - \delta_{u_{m-1}}^{1,1-l} \mu_{\dots, u_{m-2}, u_m, \dots}^{<l-1>} \right] \times \overline{\mathcal{H}}_{\text{ex}}^k \quad (44)$$

$$\frac{\Delta^{1,1-l} r_m^k}{l \Delta t} = - \left[\delta_{s_m}^{1,1-l} \mu_{\dots, s_{m-1}, s_{m+1}, \dots}^{<l-1>} \right] \overline{\mathcal{H}}_{\text{ex}}^k \quad (45)$$

$$\frac{\Delta^{1,1-l} s_m^k}{l \Delta t} = \left[\delta_{r_m}^{1,1-l} \mu_{\dots, r_{m-1}, r_{m+1}, \dots}^{<l-1>} \right] \overline{\mathcal{H}}_{\text{ex}}^k = 1 \quad (46)$$

を考えれば、チェーンルール (40) より

$$\begin{aligned} & \frac{\Delta [\mu_{u_0, \dots, s_{N-1}}^l \overline{\mathcal{H}}_{\text{ex}}^k]}{\Delta t} \\ &= \sum_{m=0}^{N-1} \left[\delta_{u_m}^{1,1-l} \mu_{\dots, u_{m-1}, u_{m+1}, \dots}^{<l-1>} \overline{\mathcal{H}}_{\text{ex}}^k \right] \frac{\Delta^{1,1-l} u_m^k}{l \Delta t} \\ &+ \sum_{m=0}^{N-1} \left[\delta_{r_m}^{1,1-l} \mu_{\dots, r_{m-1}, r_{m+1}, \dots}^{<l-1>} \overline{\mathcal{H}}_{\text{ex}}^k \right] \frac{\Delta^{1,1-l} r_m^k}{l \Delta t} \\ &+ \sum_{m=0}^{N-1} \left[\delta_{s_m}^{1,1-l} \mu_{\dots, s_{m-1}, s_{m+1}, \dots}^{<l-1>} \overline{\mathcal{H}}_{\text{ex}}^k \right] \frac{\Delta^{1,1-l} s_m^k}{l \Delta t} \\ &= \frac{1}{2 \Delta x} \sum_{m=0}^{N-1} \left[\delta_{u_m}^{1,1-l} \mu_{\dots, u_{m-1}, u_{m+1}, \dots}^{<l-1>} \overline{\mathcal{H}}_{\text{ex}}^k \right. \\ &\quad \times \delta_{u_{m+1}}^{1,1-l} \mu_{\dots, u_m, u_{m+2}, \dots}^{<l-1>} \overline{\mathcal{H}}_{\text{ex}}^k \\ &\quad - \delta_{u_{m-1}}^{1,1-l} \mu_{\dots, u_{m-2}, u_m, \dots}^{<l-1>} \overline{\mathcal{H}}_{\text{ex}}^k \\ &\quad \left. \times \delta_{u_m}^{1,1-l} \mu_{\dots, u_{m-1}, u_{m+1}, \dots}^{<l-1>} \overline{\mathcal{H}}_{\text{ex}}^k \right] \\ &= 0 \end{aligned} \quad (47)$$

となるので、エネルギー保存則が成り立つ。なお、(46) より離散時間系でも $s_m^k = t^k$ と選べる。

4. 数値計算例

この節では、 $l=2$ の場合について数値計算の例を示す。差分スキームは (44) より

$$\begin{aligned} & \frac{u_m^{k+1} - u_m^{k-1}}{2 \Delta t} \\ &+ \frac{1}{2 \Delta x} \left[(u_m^{k+1})^2 + u_{m+1}^{k+1} u_{m+1}^{k-1} + (u_{m+1}^{k-1})^2 \right. \\ &\quad \left. - (u_{m-1}^{k+1})^2 - u_{m-1}^{k+1} u_{m-1}^{k-1} - (u_{m-1}^{k-1})^2 \right] \\ &+ \frac{1}{\Delta x^3} \left[u_{m+2}^k - u_{m+1}^{k+1} - u_{m+1}^{k-1} \right. \\ &\quad \left. + u_{m-1}^{k+1} + u_{m-1}^{k-1} - u_{m-2}^k \right] \\ &= \eta^k \end{aligned} \quad (48)$$

の2段階法となる。 η^k とウィーナー過程 W^k の関係を

$$\eta^k = \frac{W^{k+1} - W^{k-1}}{2 \Delta t} \quad (49)$$

とする。 W^k は

$$W^0 = 0 \quad (50)$$

$$\langle (\Delta W^k)^2 \rangle = 2 \epsilon \Delta t \quad (51)$$

として、平均が0で標準偏差が $\sqrt{2 \epsilon \Delta t}$ の正規乱数を用いて ΔW^k を作るにより次々と作成する。

なお、各サイズは

$$L = 40, \quad \Delta x = 0.2, \quad \Delta t = 0.001$$

とし、ノイズの強さ ϵ は

$$\epsilon = 0, \epsilon = 10^{-3}$$

$$p = 1, x_0 = 20$$

の場合について数値計算を行った。

以下に述べるように、数値計算として1ソリトン解と2ソリトン解の計算を行った。

例1：1ソリトン解

確率 KdV 方程式 (1) の1ソリトン解 [2] は

$$u = 2p^2 \operatorname{sech}^2 \theta \tag{52}$$

$$\theta = p \left[x - 4p^2 t - x_0 - 6 \int_0^t W(t') dt' \right] \tag{53}$$

で与えられる。ここで、 p は任意の実数である。差分スキームは2段階法なので計算の出発点として u_m^0 と u_m^1 が必要であるが、これらの値は厳密解から求めた。数値計算では

とした。

図1に $\epsilon = 0$ すなわちノイズがない場合の数値計算の結果 ($u - W$ の時空パターン) を示す。ソリトンが形を変えずに一定の速さで伝播していくようすが示されている。

図2に $\epsilon = 10^{-3}$ の場合の数値計算の結果を示す。ここで、 $t = 40$ までのウィーナー過程 $W(t)$ の絶対値の最大値 $W_m \approx 0.304$ である。ノイズによってソリトンの形は変わらないが速さは変化しているようすが示されている。図3に同じ場合の $u - W$ の時空パターンがガリレイ変換した空間座標で描かれている。2節で述べたように、ガリレイ変換するとノイズのない解になるはずであるが、図3は図1すなわちノイズのない場合と同じ結果を示している。したがって、差分スキームが信頼のおけるものであることがわかる。

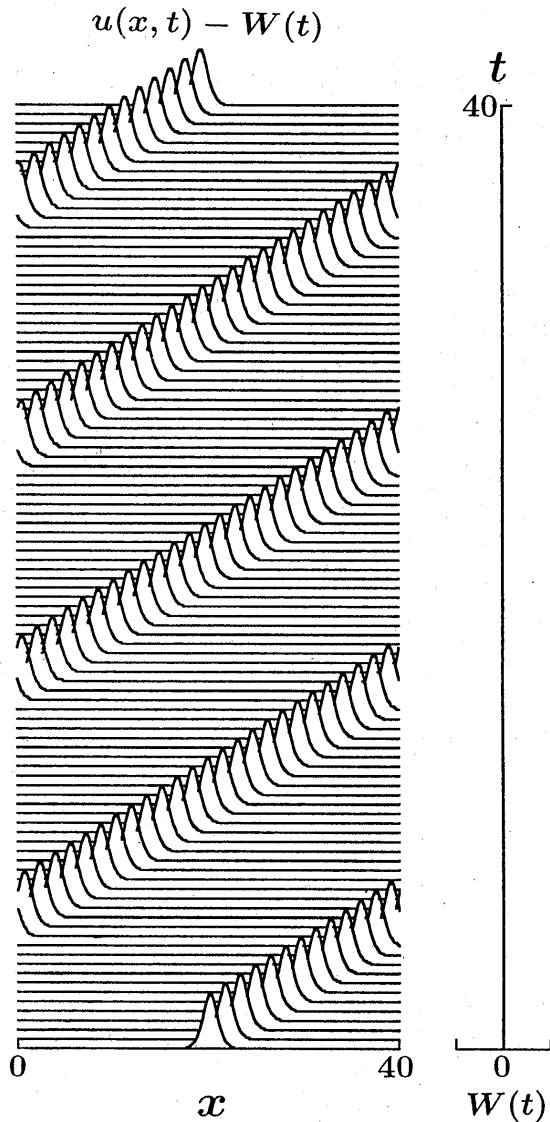


図1 1ソリトンの数値計算 ($\epsilon = 0$)

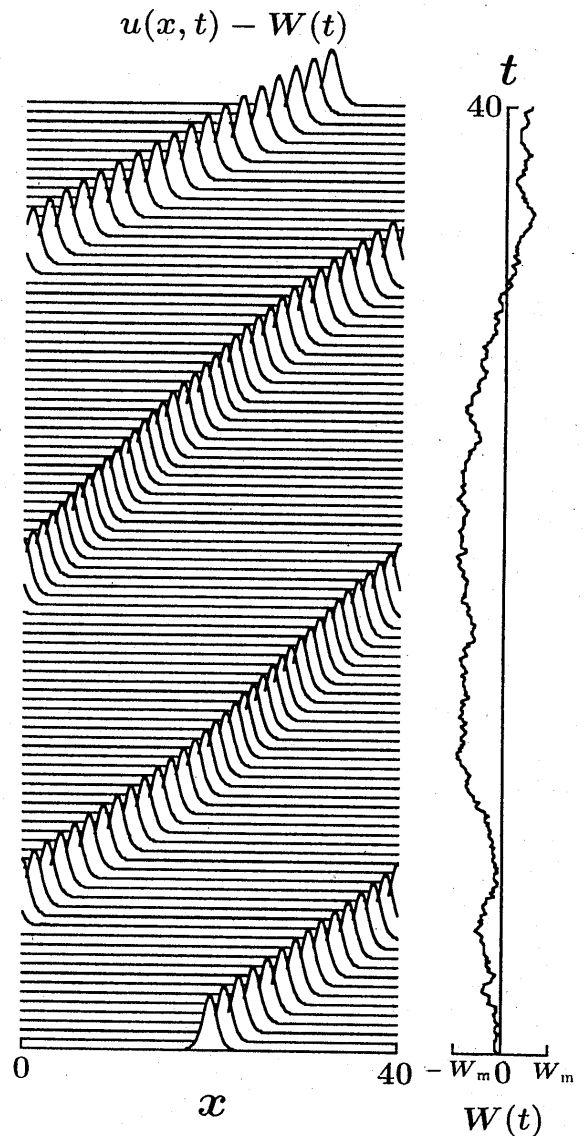


図2 1ソリトンの数値計算 ($\epsilon = 10^{-3}$)

図4に $\epsilon = 0$ すなわちノイズがない場合の数値計算の結果を示す。2つのソリトンが衝突しても形を変えずに伝播するようすが示されている。

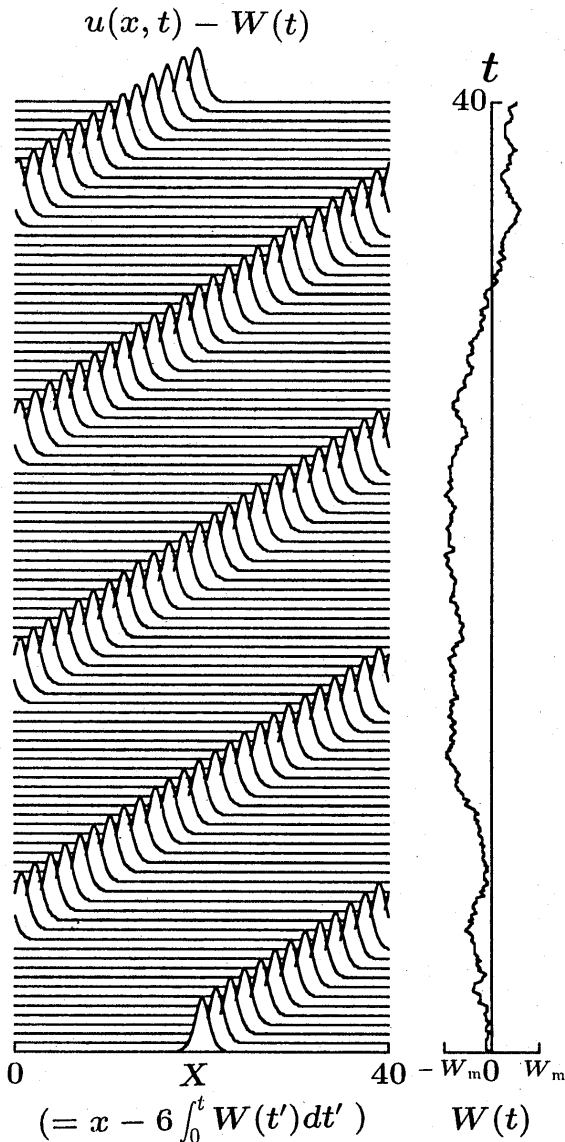


図3 1ソリトンのガリレイ変換 ($\epsilon = 10^{-3}$)

例2：2ソリトン解

2つのソリトンの衝突の数値計算も行った。初期には2つのソリトンが十分離れていると考えて、

$$u(x, 0) = 2p_1^2 \text{sech}^2 \theta_1 + 2p_2^2 \text{sech}^2 \theta_2 \quad (54)$$

$$p_1 = 1, p_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (55)$$

$$\theta_1 = p_1[x - x_1(0)], x_1(0) = 30 \quad (56)$$

$$\theta_2 = p_2[x - x_2(0)], x_2(0) = 10 \quad (57)$$

とした。 u_m^1 の値は、まだ2つのソリトンが相互作用していないと考え、1つのソリトンがそのまま伝播するとして定めた。

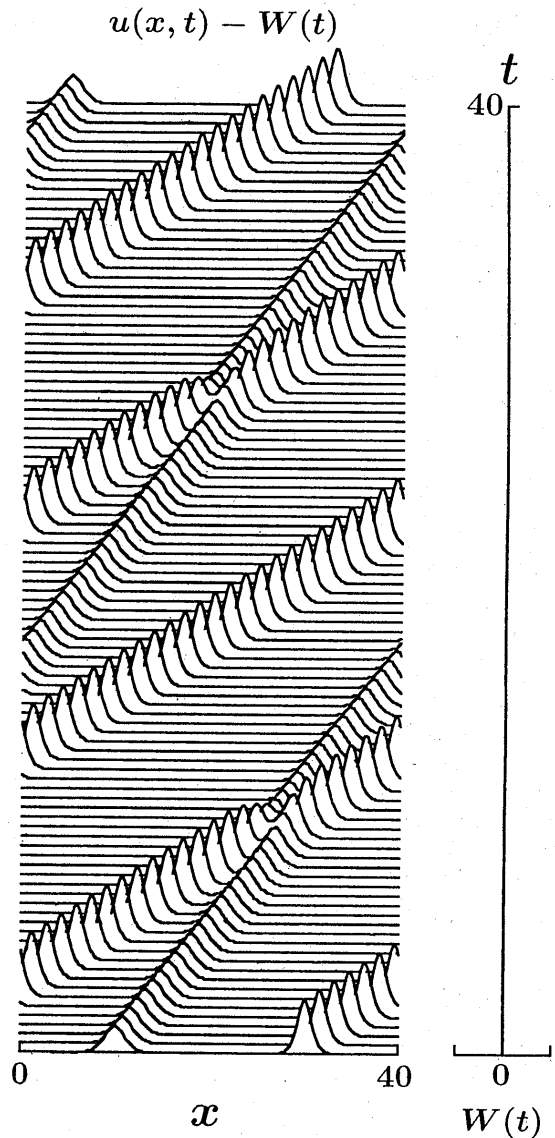


図4 2ソリトンの数値計算 ($\epsilon = 0$)

図5に $\epsilon = 10^{-3}$ の場合の数値計算の結果を示す。ノイズがあってもソリトンは衝突によって壊れることがないようすが示されている。1ソリトンのときと同じように、 $u - W$ の時空パターンをガリレイ変換した空間座標で描くと、図5すなわちノイズのない場合と同じ結果を与える。

5. おわりに

本研究では確率 KdV 方程式に対して、時間とエネルギーに相当する正準共役な変数を追加することによって、エネルギーの保存する差分法を適用できることを示し、1ソリトン

そのような差分法を議論することは興味ある問題である。

参考文献

- [1]石森勇次 (2003) : 確率ハミルトン力学系に対するエネルギー保存差分法, 富山県立大学紀要, 第13巻, pp.1-8.
- [2]M.Wadati (1983) : Stochastic Korteweg-de Vries Equation, J.Phys.Soc.Jpn., Vol.52, pp.2642-2648.

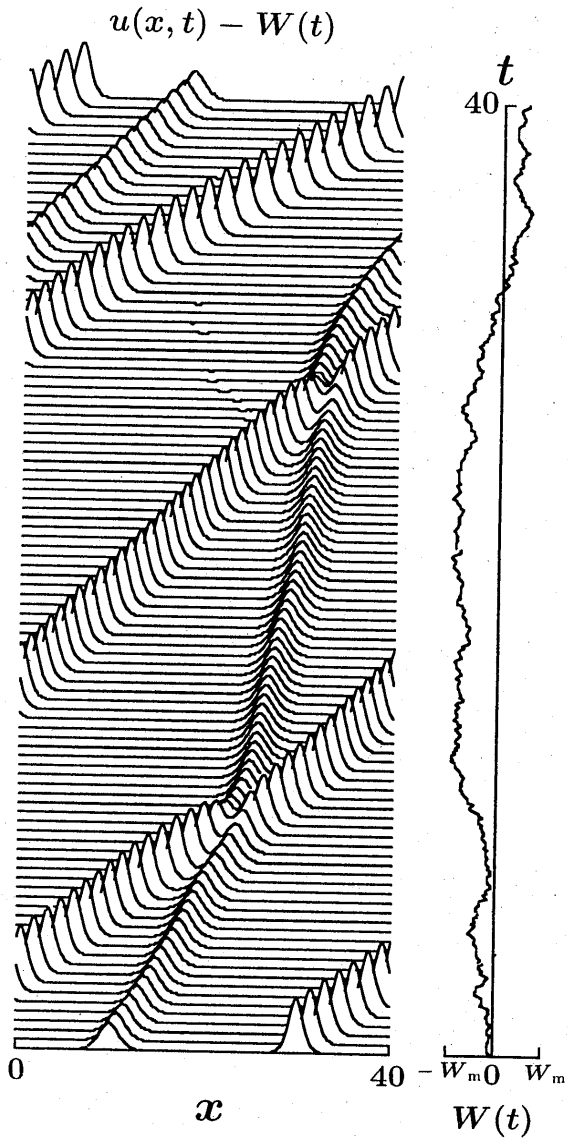


図5 2ソリトンの数値計算 ($\epsilon = 10^{-3}$)

解と2ソリトン解の数値計算を行った。数値計算では、 ϵ の値すなわちノイズの大きさが有限の場合、ガリレイ変換に対する性質が壊れていないなどの結果を得た。

拡張されたエネルギー関数の保存は必ずしも差分スキームの安定性を保証するわけではない。この方程式特有の性質として

$$I = \int_0^L (u - W)^2 dx$$

の保存性がある。残念ながら提案した差分法は I の保存を保証しているわけではない。確率 KdV 方程式特有の方法ではあるが、 I の保存を保証する差分法があれば、その保存量の形から $u(x,t)$ は発散することはない。したがって、

An Energy-Conserving Difference Scheme for the Stochastic KdV Equation

Yuji ISHIMORI

Department of Liberal Arts and Sciences, Faculty of Engineering

Summary

In this paper an energy-conserving difference scheme is proposed for the stochastic KdV equation. Examples of numerical calculation by using the scheme are shown.

Key Words: difference method, energy conservation, stochastic partial differential equations, KdV equation