非可換空間上の可積分方程式について

戸田 晃一
（工学部教養教育）

可積分方程式（特にソリトン方程式）の非可換空間への拡張について報告する.

キーワード：非可換空間, 可積分系, ソリトン方程式, Lax 形式, 佐藤理論, ゲージ理論

1. 緒言

ソリトン理論・可積分系研究の一つの新しい方向（非可換化）の紹介をしたい. ここで言う「非可換化」とは「非可換空間上への拡張」を指す. 非可換空間は座標関数同士の積の非可換性で特徴づけられるが, この関係式は, 量子力学の正準交換関係に類似しており,「空間座標の不確定性関係」を導く. したがって非可換空間上では, 粒子の位置は完全に決めることができず, ある広がった分布を持つ. その結果, 可換な空間上では存在した場の特異点が, 非可換空間上では解消されるということが起こりうる. これは素朴な考察にすぎないが, 非可換空間上の場の理論では, 特異点の解消が一般に実際起こり, その結果として, 例えば, $U(1)$ インスタントンといった新しい物理的対象が現れる. 非可換空間上のゲージ理論は, 背景磁場 (B 場) 中の D-brane の有効理論として近年非常に精力的に調べられている（参考文献 [1] から [27], 及び そのれらの参考文献を参照）. 特に非可換 4 次元空間上の自己双対なゲージ場の配位 (非可換インスタントン) は ADHM 構成法によって具体的に厳密に構成され, 対応する D-brane の性質についても理解が進んだ [2, 6]. これは Anti Self-dual Yang-Mills(ASDYM) 方程式が非可換空間でも「解ける」すなわち「可積分である」ことを意味する [13].

一方, より低次元の可積分系（ソリトン方程式）として, Korteweg-de Vries(KdV) 方程式, Kadomtsev-Petviashvili(KP) 方程式といったものが多数知られている. これらの非可換化についても, 特異点の解消から新しい物理的対象が現れることは十分期待されるが, その体系的研究はこれまでほぼ皆無であった. 非可換空間上の場の方程式というのは無限階かつ無限個微分方程式で記述され, それが解けるという状況はむしろ奇跡に近いのである.

ところが, これらの可積分系（ソリトン方程式）は, 4 次元の ASDYM 方程式の次元還元によって (ほとんど全て) 得られることが知られている (**Ward** 予想)[28]. これと ASDYM 方程式の非可換化の成功を合わせると, KdV 方程式, KP 方程式といったソリトン方程式の非可換化も非常に面白いものと期待される. 次元還元によって得られた方程式は, 付随する Lax 対を用いて記述できることが知られている. Lax 対を持つ方程式の多くは可積分性が期待されるのである [29].

このような背景の下で, 筆者と共同研究者は非可換空間上の Lax 対の生成法を提唱し, 様々な新しい非可換 Lax 対を見出した [30, 31]. これらの方程式は既知の非可換可積分方程式とちょうど一致し, 可積分系の非可換化の一意性を示唆している.

本小論の前半では, 非可換空間 及び Lax 対の構成法 (*Lax Pair Generating Technique*) を解説する. そして後半で, 非可換 Burgers 方程式を例にとり, 非可換可積分系がもつ豊富な数理的性質や事実について紹介したい.

2. 非可換空間

ここ数年の非可換空間（**NC**）上のゲージ理論は大きな成功を収めている. まず非可換空間を定義する. その導入には次の２つが知られている.

2.1 演算子形式

非可換座標を

$$[x^i,\ x^j] = i\theta^{ij} \tag{1}$$

で定義する．ただし θ^{ij} は実反対称テンソル（$\theta^{ji} = -\theta^{ij}$）で，逆元 θ^{-1} は常に存在するものとする．また，この報告では θ^{-1} は正定値とする．

このとき微分は，

$$\partial_i x^j = \delta_i^j \tag{2}$$

となるように定義すると，座標の関数 $f(x)$ の微分は

$$\partial_i f = \left[-i(\theta^{-1})_{ij}x^j, f\right] \tag{3}$$

と書ける．ここで $\partial_i \equiv \dfrac{\partial}{\partial x_i}$ である．$f = x^k$ の場合，確かに

$$\begin{aligned} \partial_i x^k &= -i(\theta^{-1})_{ij}\left[x^j, x^k\right] \\ &= -i(\theta^{-1})_{ij} i\theta^{jk} = \delta_i^k \end{aligned} \tag{4}$$

となる．f も演算子的に考えると，（つまり，後ろにぶち当たる関数 ψ があると思うと，）

$$\left[\hat{\partial}_i, f\right]\psi = \left[-i(\theta^{-1})_{ij}x^j, f\right]\psi \tag{5}$$

となる．（区別のため notation をこそっとかえている．）ここで，

$$\hat{\partial}_i = -i(\theta^{-1})_{ij}x^j \tag{6}$$

を使うこともできる．このとき，

$$\begin{aligned} \left[\hat{\partial}_i, \hat{\partial}_j\right] &= \left[-i(\theta^{-1})_{ik}x^k, -i(\theta^{-1})_{j\ell}x^\ell\right] \\ &= -(\theta^{-1})_{ik}(\theta^{-1})_{j\ell} i\theta^{k\ell} \\ &= -i(\theta^{-1})_{ji} = i(\theta^{-1})_{ij} \end{aligned} \tag{7}$$

となる[1]．

2.2 スター積（Weyl-Moyal 積）

座標が普通の数でないと思うかわりに，積が普通の積でないと思ってみてはどうだろう．

Weyl-Moyal スター積[2] を次のように定義する：

$$\begin{aligned} (f\star g)(x) &\equiv e^{\frac{i}{2}\theta^{ij}\partial_i\partial'_j} f(x)g(x')\Big|_{x'=x} \\ &= f(x)g(x) + \frac{i}{2}\theta^{\mu\nu}\partial_\mu f(x)\partial_\nu g(x) \\ &\quad +\mathcal{O}(\theta^2) \end{aligned} \tag{8}$$

ただし θ^{ij} は実数とする（ここで x は普通の数，∂_i なども普通の微分である）[3]．$\theta^{ij} \to 0$ のとき，$\star$-積は通常の積に戻る．これを可換極限と呼ぶことにする．

<u>例 1</u>　$f(x) = x^i$, $g(x) = x^j$ のとき

$$x^i \star x^j = x^i x^j + \frac{i}{2}\theta^{ij} \tag{9}$$

である．故に，

$$x^i \star x^j - x^j \star x^i = \left[x^i, x^j\right]_\star = i\theta^{ij} \tag{10}$$

を満たす．これで演算子形式の非可換座標が導出された．

<u>例 2</u>　$f(x) = e^{ik\cdot x}$, $g(x) = e^{ik'\cdot x}$ のとき

$$e^{ik\cdot x} \star e^{ik'\cdot x} = e^{-\frac{i}{2}\theta^{ij}k_i k'_j} e^{i(k+k')\cdot x} \tag{11}$$

である．

2.3 非可換空間上のゲージ理論

通常の場合の field strength は

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{ij} &= \partial_i A_j - \partial_j A_i + i\left[A_i, A_j\right] \\ &= -i\left[D_i, D_j\right] \end{aligned} \tag{12}$$

である．ただし $D_i \equiv \partial_i + iA_i$ とする．

非可換空間では，(12) の一行目のように

$$\mathcal{F}_{ij}^{(\star)} = \partial_i A_j - \partial_j A_i + i\left[A_i, A_j\right]_\star \tag{13}$$

とすればよい．$U(1)$ でも最後の項が残ることに注意する．

$U(1)$ ゲージ変換は

$$\delta A_i = \partial_i\lambda + i\left[A_i, \lambda\right]_\star \tag{14}$$

であり，この変換で

$$\delta\mathcal{F}_{ij}^{(\star)} = i\left[\mathcal{F}_{ij}^{(\star)}, \lambda\right]_\star \tag{15}$$

である．したがって，

$$\int d^n x \mathcal{F}_{ij}^{(\star)} \star \mathcal{F}_{ij}^{(\star)} \tag{16}$$

---

[1] $\hat{\partial}_i$ を $U(1)$ ゲージ場を含んだ共変微分と思えば，右辺が磁場に見えてくる人もいる（らしい…）．

[2] 正確にはスター積はもっと一般的に定義されるものであるが，ここでは「非可換ユークリッド空間」のみを扱うので，このような具体的な表式で表すことができる．スター積は普通の可換な関数（場）に対して定義される積の一つである．

[3] 場合によっては，

$$(f\star g)(x) \equiv \exp\left[\frac{i}{2}\theta^{ij}\frac{\partial}{\partial\xi^i}\frac{\partial}{\partial\eta^j}\right] f(x+\xi)g(x+\eta)\Big|_{\xi=\eta=0}$$

とも書く．

はゲージ変換の下で不変であるが，$\mathcal{F}_{ij}^{(\star)} \star \mathcal{F}_{ij}^{(\star)}$ は不変ではない!!

非可換空間上のゲージ理論は様々な物理的意味をもつ理論として認識されている．特に可換の世界を記述している理論を非可換の世界に拡張すると，解空間が拡張され，可換の世界では予言できなかった現象を説明できることが報告されている[4]．

それではよく知られている可積分なソリトン方程式を非可換の世界に拡張することは可能であろうか？ 答えは「**YES**」である．本小論では，その NC ソリトン方程式を導出する方法を紹介することを主目的の一つとしている．

3. 非可換化

可換空間上の可積分なソリトン方程式を非可換空間へ拡張することはそれほど難しくはない．ソリトン方程式に付随する Lax 対（線形演算子の対）を非可換空間に拡張すればよい[5] [30]．KdV 方程式を例にとり，この方法を説明する．

Korteweg-de Vries(KdV) 方程式の Lax 対を

$$\left\{\begin{array}{lcl} L_{\mathbf{KdV}} &=& \partial_x^2 + u(x,t), \\ T_{\mathbf{KdV}} &=& \partial_x L_0 + T' + \partial_t \end{array}\right. \tag{17}$$

とする．ここで $\partial_x L_0 = \partial_x^3 + u\partial_x + u_x$ であり，また T' は現時点では未知演算子である．

ここで，時空の非可換性を

$$[t,\ x] = i\theta \tag{18}$$

とする．そして非可換空間上の Lax 方程式を

$$[L, T]_\star \equiv L \star T - T \star L = 0 \tag{19}$$

と約束すると，

$$\begin{aligned} 0 = [L,\ T]_\star &= [\partial_x^2 + u, \partial_x^3 + u\partial_x + u_x + T' + \partial_t]_\star \\ &= -u_x\partial_x^2 - (u_t + u_x \star u) \\ &\quad + [\partial_x^2 + u, T']_\star \end{aligned} \tag{20}$$

より，上式の第 1 項と最終項に着目すると

$$T' = A\partial_x + B \tag{21}$$

とおける．ただし，A と B は $u, u_x, u_{xx}, \cdots$ の多項式でかけるはずである．このとき最終項より，

$$\begin{aligned} [\partial_x^2 + u, T']_\star &= [\partial_x^2 + u, A\partial_x + B]_\star \\ &= 2A_x\partial_x^2 + \Big(A_{xx} + 2B_x + [u, A]_\star\Big)\partial_x \\ &\quad + \Big(B_{xx} - Au_x + [u, B]_\star\Big) \end{aligned} \tag{22}$$

を得る．よって，上式 (20) と (22) から

$$A = \frac{1}{2}u, \tag{23}$$

$$B = -\frac{1}{4}u_x \tag{24}$$

が求まった[6]．つまり，未知演算子 T' は

$$T' = \frac{1}{2}u\partial_x - \frac{1}{4}u_x \tag{25}$$

となり，このとき NC-Lax 対は

$$\left\{\begin{array}{lcl} L_{\mathbf{KdV}} &=& \partial_x^2 + u(x,t), \\ T_{\mathbf{KdV}} &=& \partial_x^3 + \frac{3}{2}u\partial_x + \frac{3}{4}u_x \end{array}\right. \tag{26}$$

である．そして NC-KdV 方程式

$$u_t + \frac{1}{4}u_{xxx} + \frac{3}{4}(u \star u)_x = 0, \tag{27}$$

が導出される．可換極限をとれば，いつもの KdV 方程式に戻る．

可換空間上の可積分方程式に付随する Lax 対を非可換化することから，導出される (1 + 1) 次元非可換方程式を挙げると，

- **NC-Burgers** 方程式:

$$\begin{aligned} &u_t - au_{xx} + (1 + a - b)u_x \star u \\ &+ (1 - a - b)u \star u_x = 0, \end{aligned} \tag{28}$$

（ただし，a, b は任意の定数である．）

- **NC-shallow water** 方程式:

$$\begin{aligned} &u_t + \frac{1}{4}u_{xxt} + \frac{1}{2}(u \star u)_t \\ &+ \frac{1}{4}\Big(u \star (\partial_x^{-1}u_t) + (\partial_x^{-1}u_t) \star u\Big)_x \\ &+ \frac{1}{4}\Big[u, \partial_x^{-1}\Big([u, \partial_x^{-1}u_t]_\star\Big)\Big]_\star = 0, \end{aligned} \tag{29}$$

---

[4] 共同研究者の浜中 真志氏は，博士論文の前半で，この辺のことを詳しく解説している [32]．

[5] ここで説明する方法が，元のソリトン方程式がもつ可積分性まで（完全に）世襲させることができるかどうかは，現時点では不明である．（筆者は世襲されると信じている．）非可換空間上での Lax 対に対する意味が今ひとつ不明である．

[6] 正確には積分定数が A, B のそれぞれに付く．しかし今の場合それらは適当なスケール変換で消すことができる．よって省略した．

- **NC-Boussinesq 方程式:**

$$u_{tt} + \left([u,\ \partial_x^{-1}u_t]_\star\right)_x + (u\star u)_{xx} + \frac{1}{3}u_{xxxx} = 0, \tag{30}$$

- **NC-5th-KdV 方程式:**

$$\begin{aligned} &u_t + \frac{1}{4}u_{xxxxx} + \frac{1}{16}(u\star u)_{xx} + \frac{1}{2}u\star u_{xxx} \\ &-\frac{15}{8}u\star u_x\star u + \frac{1}{8}[u, u_{xxx}]_\star \\ &-\frac{13}{16}\Big[u, [u, u_x]_\star\Big]_\star = 0, \end{aligned} \tag{31}$$

などがある [30]. ただし, 非可換性は

$$[t,\ x] = i\theta \tag{32}$$

である.

4. NC-KdV 方程式の次元酸化

NC-Lax 対を高次元に次元拡張（次元酸化）することで, 非可換空間上の高次元方程式の導出について見ていきたい. 例として, NC-KdV 方程式の Lax 対を高次元化した結果を報告する. ここでも, 非可換性は

$$[t,\ x] = i\theta \tag{33}$$

とする.

- **NC Kadomtsev-Petviashvili(KP) 方程式：**
NC-KdV 方程式の Lax 対 (17) に新しい空間変数 y を以下のように付け加える：

$$\begin{cases} L_{\mathbf{KP}} &= L_{\mathbf{KdV}} + \partial_y, \\ T_{\mathbf{KP}} &= \partial_x L_{\mathbf{KdV}} + T' + \partial_t, \end{cases} \tag{34}$$

このとき, Lax 方程式 (19) は

$$T' = \frac{1}{2}u\partial_x - \frac{1}{4}u_x + u_x + \frac{3}{4}\partial_x^{-1}u_y, \tag{35}$$

及び 非可換方程式（$u = u(x, y, t)$）

$$\begin{aligned} &u_t + \frac{1}{4}u_{xxx} + \frac{3}{4}(u\star u)_x + \frac{3}{4}\partial_x^{-1}u_{yy} \\ &+\frac{3}{4}[u, \partial_x^{-1}u_y]_\star = 0, \end{aligned} \tag{36}$$

を得る. これを NC-KP 方程式と呼ぶ. 次元還元（$\partial_y \to 0$）をすると, NC-KP 方程式 (36) は NC-KdV 方程式 (27) にリダクションされる.

- **NC Calogero-Bogoyavlenskii-Schiff(CBS) 方程式：**
NC-KdV 方程式の Lax 対 (17) に新しい空間変数 z を以下のように付け加える [33]：

$$\begin{cases} L_{\mathbf{CBS}} &= L_{\mathbf{KdV}}, \\ T_{\mathbf{CBS}} &= \partial_z L_{\mathbf{KdV}} + T' + \partial_t, \end{cases} \tag{37}$$

このとき, Lax 方程式 (19) は

$$T' = \frac{1}{2}(\partial_x^{-1}u_z\partial_x - \frac{1}{4}u_z - \frac{1}{4}\partial_x^{-1}[u,\ \partial_x^{-1}u_z]_\star, \tag{38}$$

及び 非可換方程式（$u = u(x, z, t)$）

$$\begin{aligned} &u_t + \frac{1}{4}u_{xxz} + \frac{1}{2}(u\star u)_z \\ &+\frac{1}{4}\Big(u\star(\partial_x^{-1}u_z) + (\partial_x^{-1}u_z)\star u\Big)_x \\ &+\frac{1}{4}\Big[u, \partial_x^{-1}\Big([u, \partial_x^{-1}u_z]_\star\Big)\Big]_\star = 0, \end{aligned} \tag{39}$$

を得る. これを NC-CBS 方程式と呼ぶ. 次元還元（$\partial_z = \partial_x$）をすると, NC-CBS 方程式 (39) は NC-KdV 方程式 (27) にリダクションされる.

- **NC extended CBS(eCBS) 方程式:**
NC-KdV 方程式の Lax 対 (17) に新しい空間変数 z を以下のように付け加える [34]：

$$\begin{cases} L_{\mathbf{eCBS}} &= L_{\mathbf{KdV}} + 2\alpha\partial_z, \\ T_{\mathbf{eCBS}} &= \partial_z L_{\mathbf{KdV}} + T' + \partial_t, \end{cases} \tag{40}$$

このとき, Lax 方程式 (19) は

$$T' = \frac{1}{2}(\partial_x^{-1}u_z)\partial_x - \frac{1}{4}u_z - \frac{1}{4}\partial_x^{-1}[u,\ \partial_x^{-1}u_z]_\star, \tag{41}$$

及び 非可換方程式（$u = u(x, z, t)$）

$$\begin{aligned} &u_t + \frac{1}{4}u_{xxy} + u\star u_y + \frac{1}{2}u_x\star(\partial_x^{-1}u_y) \\ &+\alpha^2\partial_x^{-2}u_{yyy} + \partial_x^{-1}\Big([u, \partial^{-1}u_y]_\star\Big)_y \\ &+\frac{1}{2}\Big[u, u_y + \alpha\partial_x^{-2}u_{yy} + \partial_x^{-1}[u, \partial_x^{-1}u_y]_\star\Big]_\star \\ &= 0 \end{aligned} \tag{42}$$

を得る. これを NC-eCBS 方程式と呼ぶ. ただし, α は任意定数である.

このように非可換な高次元空間においてもソリトン方程式の導出は可能である. ただし厳密解については未だ見つかっていない. 非可換方程式は可換空間のとき以上に厳密解を得ることは困難である. 何故なら, スター積 (8) はその定義から明らかなように無限階かつ無限個の微分を含むからである. また, 空間の非可換性より初期値という概念も不明瞭である[7].

[7] これは今後の研究で明らかにする必要がある.

しかし, NC-Burgers 方程式 (28) は時間に関して無限階かつ無限個の微分を含んでいるが, 厳密解を得ることができる. そのことを次に見ていく.

5. NC-Burgers 方程式の厳密解

非可換性を $[t,\ x] = i\theta$ とする. NC Lax 対を

$$\begin{cases} L_{\text{Burgers}} &= \partial_x + u, \\ T_{\text{Burgers}} &= \partial_x^2 + 2u\partial_x + (a+1)u_x + bu^2 \end{cases} \tag{43}$$

と選ぶと, Lax 方程式 (19) は

$$u_t - au_{xx} + (1+a-b)u_x \star u + (1-a-b)u \star u_x = 0 \tag{44}$$

と等価である. ここで a, b は任意定数である. この方程式が NC-Burgers 方程式である. 可換極限をとると,

$$u_t - au_{xx} + 2(1-b)uu_x = 0 \tag{45}$$

となる.

可換空間の場合と同様, NC Burgers 方程式 (44) も線形化可能である. ただし一つ注意がある. NC Burgers 方程式 (44) には2つのパラメータ a と b があり, 線形化できるのは次の条件

- (i) $a + b = 1$（のとき, NC Cole-Hopf 変換 $u = -\psi_x \star \psi^{-1}$）
- (ii) $a - b = -1$（のとき, NC Cole-Hopf 変換 $u = \psi^{-1} \star \psi_x$）

を満たすときのみである [35]. これらどちらも NC-Burgers 方程式 (44) を NC 拡散方程式[8]

$$\psi_t = a\psi_{xx}, \tag{46}$$

に変換する. これはすぐに解くことができて,

$$\begin{aligned} \psi(t,x) &= 1 + \sum_{i=1}^{N} h_i e^{ak_i^2 t} \star e^{\pm k_i x} \\ &= 1 + \sum_{i=1}^{N} h_i e^{\frac{i}{2}ak_i^3\theta} e^{ak_i^2 t \pm k_i x} \end{aligned} \tag{47}$$

を得る. これは h_i 及び k_i という任意定数をもつ厳密解である. これを NC Cole Hopf 変換に代入することで, NC-Burgers 方程式 (44) の厳密解を得ることができる.

これは非常に驚くべき結果である. 何故なら, スター積 (8) の定義により NC-Burgers 方程式 (44) には無限階かつ無限個の微分を含んでいるからである. この背景には何かの数理が隠れているように思われる.

[8] ここで「拡散」方程式と呼んでいるのは, 可換空間での名称の流用である. 本当の意味で（, つまり可換空間の時と同様の意味で,）何らかの拡散現象を記述しているかどうかは現時点では不明である.

6. Noncommutative Anti Self-dual Yang-Mills 方程式からの次元還元

可換空間の場合, 4 次元の Anti self-dual Yang-Mills（ASDYM）方程式に対して,「適当に」ゲージ群を固定し, 場の量や空間次元に「適当な」制約を加えることで, 可積分な方程式を導出できることが知られている. そして, おそらく全ての可積分方程式が導出できるであろうと信じられている（**Ward** 予想）[28, 36, 37, 38, 39].

非可換空間の場合も同様なことを考えることは自然であり, 実際に可能である. ここでは, NC-ASDYM 方程式から NC-Burgers 方程式が導出できる [35] ことを見ていく[9].

非可換性を

$$[w, z] = i\theta_1, \qquad [\bar{w}, \bar{z}] = i\theta_2 \tag{48}$$

とする. $A_{\bar{z}} = A_{\bar{w}} = 0$ と Gauge 固定（条件 **(1)**）すると,

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= A_z dz + A_{\bar{z}} d\bar{z} + A_w dw + A_{\bar{w}} d\bar{w} \\ &= A_z dz + A_w dw \end{aligned} \tag{49}$$

となり, A_z と A_w を

$$\mathcal{A} = \alpha u dz + (\beta u \star u + \gamma u_z) dw \tag{50}$$

と選ぶ. ただし, スカラー場の関数は $u = u(z, \bar{z}, w, \bar{w})$ である. NC-ASDYM 方程式とは

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{zw} &= 0, && (51) \\ \mathcal{F}_{\bar{z}\bar{w}} &= 0, && (52) \\ \mathcal{F}_{z\bar{z}} + \mathcal{F}_{w\bar{w}} &= 0, && (53) \end{aligned}$$

である. ここで $\mathcal{F}_{\mu\nu}$ $(\mu, \nu = z, \bar{z}, w, \bar{w})$ は

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu]_\star \tag{54}$$

で与えられる[10]. (51) より,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{zw} &= \partial_z A_w - \partial_w A_z + [A_z, A_w]_\star \\ &= (\beta u_z \star u + \beta u \star u_z + \gamma u_{zz}) - \alpha u_w \\ &\quad + [\alpha u, \beta u \star u + \gamma u_z]_\star \\ &= (\beta u_z \star u + \beta u \star u_z + \gamma u_{zz}) - \alpha u_w \\ &\quad + \alpha\gamma [u, u_z]_\star \\ &= -\alpha u_w + \gamma u_{zz} + (\beta - \alpha\gamma) u_z \star u \\ &\quad + (\beta + \alpha\gamma) u \star u_z = 0, \end{aligned} \tag{55}$$

[9] NC-KdV, NC-Nonlinear Schrödinger, NC-Sine Gordon 方程式なども次元還元より導出されることが知られている [15].

[10] $\mathcal{F}_{\mu\nu}$ の定義には虚数 i が付いたり付かなかったりする（定義 (13) と比較せよ）. これは計量の取り方の違いである.

(52) より, 現在の Gauge 固定の下で,

$$\mathcal{F}_{\bar{z}\bar{w}} = \partial_{\bar{z}} A_{\bar{w}} - \partial_{\bar{w}} A_{\bar{z}} + [A_{\bar{z}}, A_{\bar{w}}]_\star = 0 \text{ (trivial)}, \quad (56)$$

(53) より, 現在の Gauge 固定の下で,

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{z\bar{z}} + \mathcal{F}_{w\bar{w}} &= \partial_z A_{\bar{z}} - \partial_{\bar{z}} A_z + [A_z, A_{\bar{z}}]_\star + \partial_w A_{\bar{w}} \\ &\quad -\partial_{\bar{w}} A_w + [A_w, A_{\bar{w}}]_\star \\ &= -\partial_{\bar{z}} A_z - \partial_{\bar{w}} A_w = 0 \end{aligned} \quad (57)$$

となる. ここで, スカラー場の関数は $u = u(z, w)$（次元還元：条件 **(2)**）とすると, (57) は trivial である.

以上より, NC-ASDYM 方程式は条件 **(1)** と **(2)** の下で NC-Burgers 方程式

$$\alpha u_w = \gamma u_{zz} + (\beta - \alpha\gamma) u_z \star u + (\beta + \alpha\gamma) u \star u_z \quad (58)$$

を導出できる. 非可換性は $[w, z] = i\theta_1$ である.

（補足）

係数を $\alpha = 1$, $\gamma = a$, $\beta = b - 1$ と取り直し, 独立変数を $z = x$, $w = t$ だと思うと, 方程式 (58) は NC-Burgers 方程式 (44) と一致する. このときの非可換性は $[t, x] = i\theta_1$ である.

（注意）

NC-Burgers 方程式をみると, 非線形項 $u_z \star u$ と $u \star u_z$ の係数が異なる. ここが NC-KdV 方程式と比べて, 特徴的である. NC-ASDYM 方程式からの次元還元で分かるとおり, この係数の違いは $[A_z, A_w]_\star$ が原因である. （可換な）Burgers 方程式の場合, $U(1)$ ゲージなので $[A_z, A_w]$ がない. しかし, 非可換の場合は $U(1)$ ゲージでも $[A_z, A_w]_\star$ が残る. これが非可換空間上のゲージ理論をおもしろくしている理由の一つである. つまり, この非線形項の違いは, 非可換空間上の物理として本質的なものでありそう・・・・.

7. NC-Lax 対による Noncommutative Hierarchy の導出

NC-Burgers 方程式 (44) を例にとり, NC-Lax 対より高階方程式（NC-Burgers Hierarchy）をみていく [30, 35].

NC-Burgers 階層の Lax 方程式を

$$[L_{\text{Burgers}}, T_{n\text{th-h}} + \partial_{t_n}]_\star = 0, \quad (59)$$

とする[11]. ここで t_n の次数を $[t_n] = -n$ とすると, $T_{n\text{th-h}}$ の次数は $[T_{n\text{th-h}}] = n$ である. また, 非可換性は $[t_n, x] = i\theta_n$ で与えられるとする. L 演算子は $L_{\text{Burgers}} = \partial_x + u$ なので, T 演算子は

$$T_{(n+1)\text{th-h}} = \partial_x^n L_{\text{Burgers}} + T'_{(n+1)\text{th-h}}, \quad (60)$$

と仮定できる. 以下に結果をまとめる：

- $n = 1$： (second-order) NC-Burgers 方程式 (44)
- $n = 2$： NC-Lax 対：

$$\begin{cases} L_{\text{Burgers}} &= \partial_x + u, \\ T_{3\text{rd-h}} &= \partial_x^3 + 3u\partial_x^2 + 3(u_x + u^2)\partial_x \\ &\quad +(a+1)u_{xx} + bu_x \star u + cu \star u_x \\ &\quad +du^3 \end{cases}$$

で, このとき third-order NC-Burgers 方程式

$$\begin{aligned} &u_t - au_{xxx} + (1 + a - b)u_{xx} \star u + \\ &(2 - a - c)u \star u_{xx} + (3 - b - c)u_x^2 \\ &+(b - d)u_x \star u^2 + (c - b - d)u \star u_x \star u \\ &+(3 - c - d)u^2 \star u_x = 0, \end{aligned} \quad (61)$$

を得る. a, b, c, d は任意定数である.

もうすこし詳しく見ていく；

- third-order NC-Burgers 方程式 $(a = -1, b = c = d = 0)$：

$$u_t + u_{xxx} + 3u \star u_{xx} + 3u_x^2 + 3u^2 \star u_x = 0, \quad (62)$$

- third-order (conjugated) NC-Burgers 方程式 $(a = -1, b = c = 3, d = 0)$：

$$u_t + u_{xxx} - 3u_{xx} \star u - 3u_x^2 + 3u_x \star u^2 = 0, \quad (63)$$

- NC-modified KdV 方程式[12] $(a = -1, b = 0, c = d = 3)$：

$$u_t + u_{xxx} - 3u_x \star u^2 - 3u^2 \star u_x = 0, \quad (64)$$

- NC-modified KdV 方程式[13] $(a = -1, c = 0, b = d = 3)$：

$$u_t + u_{xxx} + 3[u, u_{xx}]_\star - 6u \star u_x \star u = 0, \quad (65)$$

[11] ∂_{t_n} を $T_{n\text{th-h}}$ 演算子ではなくて, Lax 方程式の部分に入れている. これは便宜上であり, 本質的な違いはどこにもない.

[12] NC-Miura 写像を用いて NC KdV 方程式 (27) から導出される.

[13] これは NC-Lax 対 (26) から導出される.

- $n=3$： fourth-order NC Burgers 方程式を与える T 演算子は

$$T_{\text{4th-h}} = \partial_x^3 L_{\text{Burgers}} + A\partial_x^3 + B\partial_x^2 + C\partial_x + D, \quad (66)$$

ただし，

$$\begin{aligned} A &= 3u, & (67)\\ B &= 3u_x + 6u^2, & (68)\\ C &= u_{xx} + 4u_x \star u + 8u \star u_x + 4u^3, & (69)\\ D &= au_{xxx} + bu_{xx} \star u + cu \star u_{xx} + du_x^2 \\ &\quad + eu_x \star u^2 + fu \star u_x \star u + gu^2 \star u_x \\ &\quad + hu^4, & (70) \end{aligned}$$

である．ここで，$a, b, \ldots, h$ は任意定数とする．このとき，fourth-order NC Burgers 方程式は

$$\begin{aligned} & u_t - au_{xxxx} + (1 + a - b)u_{xxx} \star u \\ & +(3 - a - c)u \star u_{xxx} + (4 - b - d)u_{xx} \star u_x \\ & +(6 - c - d)u_x \star u_{xx} + (b - e)u_{xx} \star u^2 \\ & +(c - b - f)u \star u_x \star u + (6 - c - g)u^2 \star u_{xx} \\ & +(d - e - f)u_x^2 \star u + (4 - e - g)u_x \star u \star u_x \\ & +(8 - d - f - g)u \star u_x^2 + (e - h)u_x \star u^3 \\ & +(f - e - h)u \star u_x \star u^2 \\ & +(g - f - h)u^2 \star u_x \star u \\ & +(4 - g - h)u^3 \star u_x = 0 \qquad (71) \end{aligned}$$

である．

同様にして，higher-order NC-Burgers 方程式は，T 演算子（$(n+1)$-th order）を

$$\begin{aligned} T_{(n+1)\text{-th}} &= \partial_x^n L + T'_{(n+1)\text{-th}} \\ &= \partial_x^{n+1} + \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!}(\partial_x^k u)\partial_x^{n-k} \\ &\quad + \sum_{l=0}^{n} A_l \partial_x^{n-l}, \qquad (72) \end{aligned}$$

とすることで与えられる．ここで，A_l は u, u_x, u_{xx} の同次多項式（次数：$[A_l] = l + 1$）で $A_0 = nu$ とする．

同様に，NC-KdV 階層，NC-KP 階層，NC-Boussinesq 階層も導出できる [30, 40]．

8. 擬微分演算子による Noncommutative Hierarchy の導出

可換空間において擬微分演算子を用いて，ソリトン方程式を体系的に研究することができることが広く知られている（これを佐藤理論と呼ぶ）[41, 42, 43, 44]．同様に，非可換空間上においても擬微分演算子を用いた議論が可能である．ここでも NC-Burgers 階層の導出を通して，非可換佐藤理論を紹介する[14] [35]．

擬微分演算子を

$$L = \partial_x + u_1 + u_2\partial_x^{-1} + u_3\partial_x^{-2} + u_4\partial_x^{-3} + \cdots \quad (73)$$

とする．無限個の独立変数 $(t_1, t_2, t_3, \ldots)$ に依存する無限個の場の関数が u_m $(m = 1, 2, \ldots)$ 入っている．関数 $f(x)$ に対して，演算子 ∂_x^n は

$$\partial_x^n \cdot f \equiv \sum_{i \geq 0} \begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix} (\partial_x^i f)\partial^{n-i} \quad (74)$$

と作用する．ただし，

$$\begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix} \equiv \frac{n(n-1)\cdots(n-i+1)}{i(i-1)\cdots 1} \quad (75)$$

である．また，演算子 ∂_x^{-1} は

$$\begin{aligned} \partial_x^{-1} \cdot f &= f\partial_x^{-1} - f_x\partial_x^{-2} + f_{xx}\partial_x^{-3} - \cdots, \\ \partial_x^{-2} \cdot f &= f\partial_x^{-2} - 2f_x\partial_x^{-3} + 3f_{xx}\partial_x^{-4} - \cdots, \\ \partial_x^{-3} \cdot f &= f\partial_x^{-3} - 3f_x\partial_x^{-4} + 6f_{xx}\partial_x^{-5} - \cdots \end{aligned}$$

と作用する．

それでは，NC-Burgers 階層を導出していく．両立条件を

$$[\partial_{t_m} - B_m, L]_\star = 0, \quad (76)$$

とする．ただし，

$$B_m \equiv (\underbrace{L \star \cdots \star L}_{m \text{ times}})_{\geq 1} =: (L^m)_{\star \geq 1} \quad (77)$$

である[15]．少し計算結果を書くと，

$$\begin{aligned} B_1 &= \partial_x, & (78)\\ B_2 &= \partial_x^2 + 2u_1\partial_x, & (79)\\ B_3 &= \partial_x^3 + 3u_1\partial_x^2 + 3(u_2 + u_1^2 + (u_1)_x)\partial_x, & (80) \end{aligned}$$

である．以下に結果をまとめる：

- $m = 1$： 両立条件 (76) より $u_{t_1} = u_x$ $(t_1 = x)$ を得る．

[14] NC-KdV 階層, NC-KP 階層, NC-Boussinesq 階層も導出できる [40].

[15] この中の添字 "≥ 1" は B_m の正べきのみであることを意味する．

- $m = 2$: 両立条件 (76) は線形化可能な second order NC Burgers（$t_2 \equiv t$）

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= [B_2, L_{\text{Burgers}}]_\star = [\partial_x^2 + 2u\partial_x, \partial_x + u]_\star \\ &= u_{xx} + 2u \star u_x, \qquad (81)\end{aligned}$$

を与える.

- $m = 3$: 両立条件 (76) は third order NC Burgers 方程式

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t_3} &= [B_3, L_{\text{Burgers}}]_\star \\ &= [\partial_x^3 + 3\partial_x^2 + 3(u^2 + u_x)\partial_x, \partial_x + u]_\star \\ &= u_{xxx} + 3u \star u_{xx} + 3u_x^2 + 3u^2 \star u_x (82)\end{aligned}$$

を与える. これは third order NC Burgers 方程式 (62) と一致する.

- $m = 4$: 両立条件 (76) は fourth order NC Burgers 方程式

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t_4} &= [\partial_x^4 + 4u\partial_x^3 + 6(u^2 + u_x)\partial_x^2 \\ &\quad +4(u^3 + u_x \star u + 2u \star u_x)\partial_x, \partial_x + u]_\star \\ &= u_{xxxx} + 4u \star u_{xxx} + 4u_{xx} \star u_x \\ &\quad +6u_x \star u_{xx} + 6u^2 \star u_{xx} + 4u_x u u_x \\ &\quad +8u \star u_x^2 + 4u^3 \star u_x \qquad (83)\end{aligned}$$

を与える.

9. 結言

よく知られている可積分なソリトン方程式を, その付随する Lax 対を非可換空間へ拡張することで, 非可換な可積分系の世界へ切り開いた. これはそれまでの非可換空間に関する研究はゲージ場に限られていた. しかし, ソリトン方程式はスカラー場であり, 新しい研究の方向が開かれたと言ってよい. 非可換空間上のスカラー場で記述される可積分系はこれからの可積分研究の一つのトピックスとなりえるものである.

しかし, ここで「Lax 対が付随するからといって導出された非可換方程式が可積分であると, 強く主張することはできないのでは？」との声が聞こえてきそうである. しかし, ごく最近, 共同研究者の浜中 真志氏が体系的に保存量・対称性の導出できることを示した [45]. これは可積分系の一つの重要な証拠（根拠）である. ただ厳密解については未だに NC-Burgers 方程式を除いて成功していない. 解を求められない理由は非常にはっきりしていて, スター積がその定義 (8) から明らかなように, 無限階かつ無限個の微分を含むからである. また, 空間の非可換性より初期値という概念も不明瞭である. これは今後の研究で明らかにする必要がある.

現在, 体系的に非可換方程式の厳密解の構成法を開発中である. また, 非可換空間上の Yang-Mills 方程式や超弦理論の D-brane などとの関係についても現在研究を進めている.

謝辞

浜中 真志氏（東大・総文, 学振 PD）, 小林 匡氏（京大・情報, 院生）との共同研究は大変有意義なものであった. 両氏に深く感謝する.

本研究を進めるにあたり有益な助言や参考文献を紹介して下さった土田 隆之氏（東大・数理）に感謝する.

最後に本研究は平成１３年度笹川科学研究助成（13-089K）, 平成１４年度富山県大若手教員奨励研究 及び科研費（若手 B: 15740242）の補助により進められたものであることを附記しておく.

参考文献

[1] D.J. Gross and N.A. Nekrasov (2000): Monopoles and strings in noncommutative gauge theory, *JHEP*, **07**, PP.34-44.

[2] N.A. Nekrasov (2000): Noncommutative instantons revisited, `hep-th/0010017`.

[3] K. Furuuchi (2000): Topological charge of U(1) instantons on noncommutative $\mathbf{R}^4$, `hep-th/0010006`.

[4] N.A. Nekrasov (2000): Trieste lectures on solitons in noncommutative gauge theories, `hep-th/0011095`.

[5] O. Lechtenfeld , A.D. Popov and B. Spendig (2001): Open $N = 2$ strings in a B-field background and noncommutative self-dual Yang-Mills, *Phys. Lett. B*, **507**, pp.317-326.

[6] J.A. Harvey (2001): Komaba lectures on noncommutative solitons and D-branes, `hep-th/0102076`.

[7] O. Lechtenfeld, A.D. Popov and B. Spendig (2001): Noncommutative solitons in open N = 2 string theory, *JHEP*, **06**, pp.11-23.

[8] D.H. Correa, G.S. Lozano, E.F. Moreno and F.A. Schaposnik (2001): Comments on the U(2) noncommutative instanton, *Phys. Lett. B*, **515**, pp.206-212.

[9] O. Lechtenfeld and A.D. Popov(2001): Noncommutative multi-solitons in $2 + 1$ dimensions, *JHEP*, **0111**, pp.40-62.

[10] O. Lechtenfeld and A.D. Popov(2001): Scattering of noncommutative solitons in 2+1 dimensions, *Phys. Lett. B*, **523**, pp.178-184.

[11] K.C. Hannabuss (2001): Non-commutative twistor space, *Lett. Math. Phys.*, **58**, pp.153-161.

[12] A. Kapustin, A. Kuznetsov and D. Orlov (2001): Noncommutative instantons and twistor transform, *Commun. Math. Phys.*, **221**, pp.385-432.

[13] K. Takasaki (2001): Anti-self-dual Yang-Mills equations on noncommutative spacetime, *J. Geom. Phys.*, **37**, pp.291-306.

[14] O. Lechtenfeld and A.D. Popov(2002): Noncommutative 't Hooft instantons, *JHEP*, **03**, pp.40-57.

[15] M. Legare (2002): Reduced systems of (2,2) pseudo-Euclidean noncommutative self-dual Yang-Mills theories, *J. Phys. A*, **35**, pp.5489-5498.

[16] A. Konechny and A. Schwarz (2002): Introduction to M(atrix) theory and noncommutative geometry. II, *Phys. Rept.*, **360**, pp.353-465.

[17] M.R. Douglas and N.A. Nekrasov (2002): Noncommutative field theory, *Rev. Mod. Phys.*, **73**, pp.977-1029.

[18] Z. Horváth, O. Lechtenfeld and M. Wolf (2002): Noncommutative instantons via dressing and splitting approaches, *JHEP* **12**, pp.60-87.

[19] K. Furuta , T. Inami and M. Yamamoto (2002): Topics in nonlinear sigma models in D = 3, `hep-th/0211129`.

[20] I. Cabrera-Carnero and M. Moriconi (2002): Noncommutative integrable field theories in 2d, `hep-th/0211193`.

[21] M. Ihl and S. Uhlmann (2002): Noncommutative extended waves and soliton-like configurations in N = 2 string theory, `hep-th/0211263`.

[22] S. Bieling (2002): Interaction of noncommutative plane waves in 2+1 dimensions, *J. Phys. A*, **35**, pp.6281-6292.

[23] M. Wolf (2002): Soliton antisoliton scattering configurations in a noncommutative sigma model in 2+1 dimensions, *JHEP*, **06**, pp.55-82.

[24] F. Franco-Sollova and T. Ivanova (2003): On noncommutative merons and instantons, *J. Phys. A*, **36**, pp.4207-4220.

[25] M.T. Grisaru and S. Penati (2003): An integrable noncommutative version of the sine-Gordon system, *Nucl. Phys. B*, **655**, pp.250-276.

[26] R.J. Szabo (2003): Quantum field theory on noncommutative spaces, *Phys. Rep.*, **378**, pp.207-299.

[27] H. Nishino and S. Rajpoot (2003): Noncommutative self-dual supersymmetric Yang-Mills theory, *Phys. Lett. B*, **572**, pp.91 -100.

[28] R.S. Ward (1985): Integrable And Solvable Systems, And Relations Among Them, *Phil. Trans. Roy. Soc. Lond. A*, **315**, pp.451-457.

[29] M. Blaszak (1998): *Multi-Hamiltonian Theory of Dynamical Systems* , Springer-Verlag.

[30] K. Toda (2002)： Extensions of soliton equations to non-commutative (2 + 1) dimensions, *JHEP*, `PrHEP unesp2002/38`).

[31] M. Hamanaka and K. Toda (2003): Towards noncommutative integrable systems, *Phys. Lett. A*, **316**, pp.77-83.

[32] M. Hamanaka (2003): Noncommutative solitons and D-branes, `hep-th/0303256`.

[33] S-J. Yu, K. Toda, N. Sasa and T. Fukuyama (1998): N soliton solutions to the Bogoyavlenskii-Schiff equation and a quest for the soliton solution in (3 + 1) dimensions, *J. Phys. A*, **31**, pp.3337-3343.

[34] S-J. Yu, K. Toda. and T. Fukuyama (1998): N-soliton solutions to a (2+1)-dimensional integrable equation, *J. Phys. A*, **31**, pp.10181-10186.

[35] M. Hamanaka and K. Toda (2003): Noncommutative Burgers equation, *J. Phys. A*, **36**, pp.11981-11998.

[36] R.S. Ward (1986): Multidimensional integrable systems, *Lect. Notes. Phys.*, **280**, Springer.

[37] R.S. Ward (1990): Integrable systems in twistor theory, *Twistors in Mathematics and Physics*, Cambridge UP.

[38] L.J. Mason and N.M. Woodhouse (1996): *Integrability, Self-Duality, and Twistor Theory* (London Mathematical Society monographs, new series: 15), Oxford UP.

[39] L. Mason and Y. Nutku (2003): *Integrability, Self-Duality, and Twistor Theory* (London Mathematical Society Lecture Note Series 295), Cambridge UP.

[40] M. Hamanaka and K. Toda (2003): Towards noncommutative integrable equations, `hep-th/0309265`.

[41] M. Sato and Y. Sato (1982): Soliton equations as dynamical systems on infinite dimensional Grassmann manifold, *Nonlinear Partial Differential Equations in Applied Sciences*, North-Holland.

[42] Y. Ohta , J. Satsuma , D. Takahashi and T. Tokihiro (1988): An elementary introduction to Sato theory, *Prog. Theor. Phys. Suppl.*, **94**, pp.210-241.

[43] T. Miwa, M. Jimbo and E. Date (2000): *Solitons*, Cambridge UP.

[44] 戸田 晃一 (2003): 可換空間上の佐藤方程式, 富山県立大学紀要, 第 **13** 巻, pp.9-17.

[45] M. Hamanaka (2003): Commuting Flows and Conservation Laws for Noncommutative Lax Hierarchies, `hep-th/0311206`.

Integrable Equations on Non-commutative Spaces

Kouichi TODA

Department of Liberal Arts and Sciences, Faculty of Engineering

Summary

Noncommutative extensions of integrable equations are reported by *Lax pair generating technique*, which has been proposed by the author and his collaborator. We are also given Hierarchies, Sato theory on noncommutative spaces and so on.

Key Words: Noncommutative spaces, Integrable systems, Soliton equations, Lax pairs, Sato theory, Gauge theory