人生いろいろ, 可積分系もいろいろ

戸田 晃一
（工学部教養教育）

非線形な無限自由度の連続系に関する可積分性について, 現在の著者の研究を題材にして紹介する.

キーワード：可積分系, Lax 対, パンルベ性, *Lax-pair Generating Technique*

1. 緒言

とあるアジアの国の流行歌 や 首相の正式な場での発言にもあるように「人生いろいろ」である. 私のこれまでの人生を振り返っても本当ににそう感じる. 高校を卒業し, 家業である生花業を二年ほど継いだ. その後, 深く考えることなく大学に入り, いつの間にやら富山にいる. しかし, この大学激動・激変の時代に生きる者として, これからもまたどこかいくことになることを覚悟している[1]. これまでにいろいろな人たちと出会い影響されながら生きてきた. 研究の興味もいろいろ変遷してきた. 現在の研究分野は『可積分系』にまつわる応用数学や数理物理学の周辺である.

可積分系と呼ばれる研究分野は 1960 年代からこの 40 年間に急速に拡大した分野である. もちろん, 可積分系研究も 40 年間にいろいろと変遷してきた. 現在では, 欧米, 旧ソ連, そして日本において育まれた伝統というものが出来つつあるように, 外から見ていて感じる.

そもそも可積分（性）とはどういうことか? 古典的な定義では求積法によって解けるとき「可積分」であると言われる. しかし, 「可積分」の定義は対象とする問題によっても異なり, 一般的な定義は（少なくとも現段階では）無いようである. はっきりとした定義も無いのに, 研究分野があるというのはどういうことか？ ここに可積分研究のおもしろさが隠れていると勝手に思っている.

そこで「可積分」の性質についてまとめることからこの小論は書き始めたい. そして, 筆者の最近の研究成果を紹介する. 最後に, 離散系の可積分性についてまとめる.

[1] この心構えだけは常に持っている. そういう意味から考えると, 「人生いろいろ」より, 「思えば遠くに来たもんだ」のほうが良かったかも ….

2. 可積分性について

元来「可積分（性）」とは有限自由度の Hamilton 力学系に対する概念であった. すなわち, Liouville-Arnold の定理 [1]:

> 自由度 N の Hamiltonian 系に N 個の保存量があり, それが Poisson 括弧に関して互いに可換ならば, 初期値問題は有限回の求積[2] によって解ける

が成り立つ系, すなわち初期値問題が求積操作の有限回の繰り返しで解けるのが可積分系である. それではソリトン方程式に代表される非線形な無限自由度の連続系に関してはどうだろうか？ 実はかなり怪しくなる. 非線形な無限自由度の連続系において, 一般には（少なくとも可積分系の研究者の間では）以下の性質（証拠）;

1. **線形化可能:**
   適当な変数変換により線形化できる.
2. **逆散乱法で解ける時** [2]:
   「『適当な境界条件の下で初期値問題を解くこと』が『線形の積分方程式を解くこと』に帰着できる」というのが, 逆散乱法のポイントである.
3. **Lax 対の存在** [3]:
   ほとんどの場合, 逆散乱法の手順にのる[3].
4. **Liouville-Arnold の意味での「可積分性」:**
   適当な Poisson 構造の下で無限個の互いに可換な保存量が存在する. (または対称性が存在する.)
5. **（反）自己双対 Yang-Mills 方程式からの導出** [4]:

[3] 筆者は逆散乱法を経由しない Lax 対の構成法を研究課題の一つにしている.

4次元の（反）自己双対 Yang-Mills 方程式に対して，「適当に」ゲージ群を固定し，場の量や空間次元に「適当な」制約を加えることで，可積分な方程式を導出できることが知られている．そして，おそらく全ての可積分方程式が導出できるであろうと信じられている（**Ward** 予想）．

6. **bi-Hamilton** 構造 [5]:
異なる Poisson 構造をもつ二通りの Hamilton 系として定式化できる．これから Liouville-Arnold の意味での「可積分性」に従うことが言える．

7. 厳密解の存在 [6]:
広田の直接法などにより（N-ソリトン解のような）広いクラスの厳密解の表式を具体的に求めることができる．

8. **Bäcklund** 変換の存在 [6]:
これがあれば大体簡単な解から逐次的にソリトン解（やそれに類する解[4]）が構成できる．

9. **Painlevé** 性 [7, 8, 9, 10]:
常微分方程式の級数解のもつ「初期値に伴って動く特異点は高々極のみ」という性質のことである．

のどれかが成り立てば「可積分」と考えられている[5]ようである [11]．上記の性質の中で有限自由度系の類推から最も素直なものは性質 **4** のように思える．しかし実は肝心の初期値問題に関する明言が抜けてしまっている．初期値問題との関連で言えば，性質 **2** が正統的であるように思える．無限自由度の可積分系の内で典型的なソリトン方程式の場合には，例えば，浅水波を記述する Korteweg-de Vries（KdV）方程式[6]である

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}=0 \quad (u=u(x,t)) \tag{1}$$

などは上記の性質 **1** から **9** の性質が全て満たされていることが知られているが，これはむしろ例外である．ほとんどの可積分系はこれらの性質の内で数個しか満たさない場合がほとんどである．これらの性質が厳密な意味で等価であるかどうかは全く証明されていない．（また離散系となるとこれらの性質はさらに怪しくなる．）このように，無限自由度の連続系の『可積分性』については，状況証拠のみで，はっきりとした定義はない．

[4] 例えば，ソリトフ（solitoff）解，ドローミオン（dromion）解や筆者が命名した浮き輪ソリトン等．
[5] ちなみに筆者の研究では性質 **3, 5, 6, 7** 及び **9** を「可積分」の指針にしている．
[6] 空間変数を x，時間変数を t とする $(1+1)$ 次元非線形偏微分方程式であり，代表的なソリトン方程式の一つである．

3. 可積分方程式の変形

可積分性の定義が曖昧なのであれば，可積分性を示すと信じられている性質（証拠）のどれか代表的なものだけを指針にし，可積分方程式を創出し，その新しい方程式が残りの性質（証拠）をどれだけ満たすのかを精査することは，大変意味深い研究である．ただ，全くの数理的なオモチャとなってはあまり意味がない．そこで，物理的に重要な可積分なマスター方程式を，指針に従い変形することを考える．

本小論では，筆者が共同研究者と進めた可積分系の変形問題の代表的な3つについて報告する．その3つとは，「空間高次元化」，「変数係数化」そして「非可換化」である．

（記号）　簡単のため，$f_x(x)\equiv\partial_x f(x)=\dfrac{\partial f}{\partial x}(x)$，
$\partial_x^{-1}f(x)=\displaystyle\int_\infty^x f(s)ds$ と約束しておく．

3.1 変形1：空間高次元化

我々の住んでいる世界が $(3+1)$ 次元であるにも関わらず，現在までに知られている非線形可積分系の多くは $(1+1)$ 次元である．高次元可積分系は，低次元の場合と比べると，非常に数少ない．低次元可積分系を単純に高次元にしてもその可積分性は保たれないのが大きな理由の一つである．よって，低次元非線形偏微分方程式の可積分という性質（可積分性）を残すような次元拡張法（高次元化法）の構築を筆者の研究課題にしている．

最近筆者は，スカラー型分演算子型 Lax 対[7]の構成法（*Lax-pair Generating Technique*）及びそれを土台とした高次元法を提案している[8]．

KdV 方程式を例にとり，これらを紹介する．

- *Lax-pair Generating Technique (LGT)*[12]:

  $(1+1)$ 次元可積分方程式である KdV 方程式のスカラー型微分演算子 Lax 対を構成する．スカラー型微分演算子 Lax 対の形を

$$L=\partial_x^2+u-\lambda\equiv L_{\mathrm{KdV}}-\lambda, \tag{2}$$
$$T=\partial_x L_{\mathrm{KdV}}+T'+\partial_t \tag{3}$$

  と仮定する．但し，$\lambda=\lambda(t)$ は固有値（スペクトラルパラメータ）であり，T' は Lax 方程式

$$[L,T]\equiv LT-TL=0 \tag{4}$$

[7] Lax 対にはスカラー型微分演算子と行列型微分演算子とがある．
[8] この方法は「非可換空間の場合」や「超対称性を持つ場合」にも有効である．

を満たすように後に決められる未定項で, $u, u_x, \cdots$ やそれらの積や商などの多項式で与えられる. また, $\partial_x L_{\rm KdV} = \partial_x^3 + u\partial_x + u_x$ となる.

$$\begin{aligned} 0 = [L,\ T] &= [\partial_x^2 + u,\ \partial_x^3 + u\partial_x + u_x + T' + \partial_t] \\ &= -u_x\partial_x^2 - (u_t + uu_x) \\ &\quad +[\partial_x^2 + u, T'] \end{aligned} \tag{5}$$

より, 上式の第1項と最終項に着目すると

$$T' = A\partial_x + B \tag{6}$$

とおける. ただし, A と B は $u, u_x, u_{xx}, \cdots$ の多項式で書けるはずである. このとき,

$$\begin{aligned} [\partial_x^2 + u,\ T'] &= [\partial_x^2 + u,\ A\partial_x + B] \\ &= 2A_x\partial_x^2 + (A_{xx} + 2B_x)\partial_x \\ &\quad +(B_{xx} - Au_x) \end{aligned} \tag{7}$$

を得る. よって, 上式 (5) と (7) から

$$A = \frac{1}{2}u, \tag{8}$$

$$B = -\frac{1}{4}u_x \tag{9}$$

が求まった[9]. つまり, 未知演算子 T' は

$$T' = \frac{1}{2}u\partial_x - \frac{1}{4}u_x \tag{10}$$

となり, このとき Lax 対は

$$\begin{cases} L_{\rm KdV} = \partial_x^2 + u(x,t) - \lambda, \\ T_{\rm KdV} = \partial_x^3 + \dfrac{3}{2}u\partial_x + \dfrac{3}{4}u_x + \partial_t \end{cases} \tag{11}$$

である. そしてこの時, KdV 方程式

$$u_t + \frac{1}{4}u_{xxx} + \frac{3}{2}uu_x = 0 \tag{12}$$

が導出される[10]. 但し, スペクトラルパラメータ $\lambda = \lambda(t)$ は

$$\frac{d\lambda}{dt} = 0 \tag{13}$$

を満している. この条件は **iso-spectral** 変形条件と呼ばれている.

[9] 正確には積分定数が A, B のそれぞれに付く. しかし今の場合それらは適当なスケール変換で消すことができる. よって省略した.
[10] 方程式 (1) と係数が異なるが, これは適当なスケーリングで解決できる.

ここで, Lax 対 と 線形問題との関係をみておく. 波動関数 $\psi = \psi(x,t)$ を Lax 対に演算させると,

$$\begin{cases} L_{\rm KdV}\psi = 0, \\ T_{\rm KdV}\psi = 0 \end{cases} \tag{14}$$

なので, 線形問題

$$\begin{cases} \psi_{xx} + u\psi = \lambda\psi, \\ \psi_t = -\psi_{xxx} - \dfrac{3}{2}u\psi_x - \dfrac{3}{4}u_x\psi \end{cases} \tag{15}$$

が得られる. この ψ についての連立線形方程式の両立条件は Lax 方程式 (4) と等価である.

- *LGT* による空間高次元化 [12]:

次に, *LGT* による可積分性を保持したまま空間高次元化できる方法を説明する. ただ, 高次元化と言っても, ただやみくもに x, t 以外の新しい空間座標を導入しただけでは, もっている可積分性は消失する. つまり, 新しい座標の入れ方に工夫が要る.

次のように, Lax 対の T 演算子 (3) を

$$L = L_{\rm KdV}, \tag{16}$$

$$T = \partial_z L_{\rm KdV} + T' + \partial_t \tag{17}$$

と次元拡張する. ここで, z は新しい空間座標, $\lambda = \lambda(z,t)$ であり, また $\partial_z L_{\rm KdV} = \partial_x^2\partial_z + u\partial_z + u_z$ となる. また T' は現時点では未知演算子である. この時, Lax 程式 (4) より,

$$\begin{aligned} 0 = [L,\ T] &= -u_z\partial_x^2 - (u_t + uu_z) \\ &\quad +[L,\ T'] \end{aligned} \tag{18}$$

より, 上式の第1項と最終項に着目すると

$$T' = A\partial_x + B \tag{19}$$

とおける. ただし, A と B は $u, u_x, u_{xx}, \cdots$ の多項式で書けるはずである. このとき最終項に代入することで, 未知演算子 T' が

$$T' = \left(\frac{1}{2}\partial_x^{-1}u_z\right)\partial_x - \frac{1}{4}u_z \tag{20}$$

と求まる. このとき, Lax 対は

$$\begin{cases} L = \partial_x^2 + u(x,z,t) - \lambda, \\ T = \partial_x^2\partial_x + u\partial_z + \dfrac{3}{4}u_z + \dfrac{1}{2}\left(\partial_x^{-1}u_z\right)\partial_x \\ \quad +\partial_t \end{cases} \tag{21}$$

であり, 高次元 KdV 方程式

$$u_t + uu_z + \frac{1}{2}u_x\partial_x^{-1}u_z + \frac{1}{4}u_{xxz} = 0 \tag{22}$$

が得られる. 但し, スペクトラルパラメータ $\lambda = \lambda(z,t)$ は

$$\lambda_t = \lambda\lambda_z \tag{23}$$

を満している. この条件は **non-isospectral** 変形条件と呼ばれている [13]. これは Calogero-Bogoyavlensky-Shiff(CBS) 方程式と呼ばれている可積分な高次元 KdV 方程式の一つであり, V 字型のソリトン波解をもつことが広く知られている [14]. $\partial_z = \partial_x$ とすれば, KdV 方程式 (12) に次元還元される.

他方, Lax 対の L 演算子 (2) に新しい空間座標を入れると, Kadomtsev-Petviashvili(KP) 方程式[11] を得ることができ [15], 階層 (*hierarchy*) も構成可能である [16].

この LGT で得られる可積分方程式の多くは, Painlevé 性を有し, 厳密解を具体的に構成できる.

3.2 変形 2: 変数係数化

定数係数の非線形可積分方程式はこれまでに数多く研究されているが, それらが記述する物理現象の多くは非常に理想化されたものである. 一方, 係数が独立変数に依存する可積分方程式に関する研究も, 定数係数の場合ほどではないが, 多くの結果が知られている. しかも物理的にも非常に重要である [17]. しかし, これまでの研究では, 係数が独立変数に陽に依存する KP 方程式は別とすると, 空間 及び 時間とも一次元の方程式に関する研究ばかりであった. そこで我々は 係数が独立変数に陽に依存する高次元可積分方程式に関する研究を現在進めている.

筆者と共同研究者の変数係数化に関する研究の一端を紹介したい.

高次元 KdV 程式 (22) の定数係数を変数係数に拡張した場合の一般形を

$$\begin{aligned} &u_t + a(x,z,t)u + b(x,z,t)u_x + c(x,z,t)u_z \\ &+d(x,z,t)uu_z + e(x,z,t)u_x\partial_x^{-1}u_z \\ &+f(x,z,t)u_{xxz} + g(x,z,t) = 0 \end{aligned} \tag{24}$$

と仮定する[12]. ここで, $u = u(x,z,t)$, $d(x,z,t) + e(x,z,t) \neq 0$ 及び $f(x,z,t) \neq 0$ とする. $a(x,z,t)$, $b(x,z,t)$, $\cdots, g(x,z,t)$ は空間変数 x, z と 時間変数 t の関数であり, これらを変数係数と呼ぶことにする. この 変数係数を適当な定数係数にとると, CBS 方程式 (22) になる. この方程式 (24) は, 一般には可積分ではない. しかし, 変数係数に適当な条件を課すことにより, 可積分となることがある. それでは, この可積分となるための条件はどのように求めることができるのであろうか? この条件を求めるのに, 我々は Painlevé テストを用いることにする.

与えられた非線形発展方程式の可積分性を調べることは, 可積分研究のもっとも基本的な問題の一つである. 体系的に全ての方程式に対して判定可能な方法があれば大変有用であるが, 完全な意味ではそのような方法はまだ知られていない. しかし, ある程度有効な 方法としては **Painlevé** テストがある. この Painlevé テストとは, 与えられた偏微分方程式が **Painlevé** 性をもつかどうかを判定するために提唱されている. このテストに対する詳細は紙数の制限により本小論では触れることができない (詳しくは参考文献 [9, 10, 18] を参照のこと). 更に, この Painlevé テストは可積分性を調べるだけではなく, 可積分方程式を導出する (, または, 探す) ことにも非常に有効な道具である ことが広く知られている [10].

我々は Painlevé テストの代表の一つである **Weiss-Tabor-Carnevale** アルゴリズム:

1. 負の整数の Leading order を決定する (Leading Order 解析)
2. Resonance を求める (Resonance 解析)
3. Resonance の個数に対応する任意関数の存在を確かめる (Compatibility 条件)

を用いて, Painlevé テストをパスするように, 変数係数 $a(x,z,t)$, $b(x,z,t)$, $\cdots, g(x,z,t)$ に対する条件を求める. (つまり, この条件が求まれば, その時の方程式 (24) は可積分であるといえる.) 但し, 方程式 (24) に対して Painlevé テストを行うためには, 方程式中の積分を消す必要がある. そのために場を

$$u = U_x \tag{25}$$

とすることで[13], 方程式 (24) は

$$\begin{aligned} &U_{xt} + a(x,z,t)U_x + b(x,z,t)U_{xx} + c(x,z,t)U_{xz} \\ &+d(x,z,t)U_xU_{xz} + e(x,z,t)U_{xx}U_z \\ &+f(x,z,t)U_{xxxz} + g(x,z,t) = 0 \end{aligned} \tag{26}$$

となる. この方程式に対して Painlevé テストを行う. 但し, 簡単のために誤解のない限り, $a(x,z,t)$, $b(x,z,t)$, $\cdots, g(x,z,t)$ を a, b, $\cdots, g$ と書くことにする.

[11] これも可積分な高次元 KdV 方程式の一つである.
[12] 一般性を失うことなく, u_t の係数を 1 とすることができる.
[13] いつもこれで上手くいくとは限らない.

1. **Leading Order 解析:**

$\phi = \phi(x, z, t)$ を用いて, $U = U(x, z, t)$ を

$$U = \phi^{\alpha} U_0(x, z, t) \tag{27}$$

と展開する. このとき, 方程式 (26) の最低次の項より, $\alpha = -1$ を得る. この α を **Leading Order** と呼ぶ. 加えて,

$$U_0 = \frac{12f}{d+e}\phi_x \tag{28}$$

も得られる.

2. **Resonance 解析:**

次に $\phi = \phi(x, z, t)$ を用いて, $U = U(x, z, t)$ を

$$U = \sum_{j=0}^{\infty} U_j \phi^{j-1} \tag{29}$$

と展開する. 但し, $U_j = U_j(x, z, t)$ とする. 展開式 (29) を方程式 (26) に代入することで, U_j が満たす漸化式

$$\begin{aligned}&(j-1)(j-4)(j-6)(j+1) f \phi_x^3 \phi_z U_j \\ &= F(U_{j-1}, \cdots, U_0, \phi_t, \phi_x, \phi_z, \cdots)\end{aligned} \tag{30}$$

が得られる. そしてこの漸化式より, $j = -1, 1, 4, 6$ のとき, U_j が任意となる. この j の値を **Resonance** と呼ぶ. $j = -1$ は ϕ が任意にとれることに対応している. $j = 1, 4, 6$ はそれぞれ展開 (29) 中の係数関数 U_1, U_4, U_6 が任意にとれることを意味している.

3. **Compatibility 条件:**

Resonance に対応した U_1, U_4 と U_6 が任意関数となるように, 係数関数 $a, b, \cdots, g$ の条件を求めることができる. 紙数の制限で詳しく論じることは出来ないが, 二組存在する. そのうちの一つは

$$\begin{aligned}&u_t + \frac{2}{3}x\{\alpha(z,t) - \beta(t) + c_z(z,t)\}u_x \\ &+\left(\frac{d'(t)}{d(t)} - \frac{f'(t)}{f(t)} + \frac{4}{3}\{\alpha(z,t) - \beta(t)\right. \\ &\left.+c_z(z,t)\}\right)u + c(z,t)u_z + d(t)uu_z \\ &+\frac{d(t)}{2}u_x\partial_x^{-1}u_z + f(t)u_{xxz} + g(z,t) \\ &= 0\end{aligned} \tag{31}$$

を与える. ここで $'$ は t の常微分を意味している. これが, 可積分な係数が独立変数に陽に依存する一般的な高次元 KdV 程式の一例である [19].

もちろんこの方法は, KP 方程式などの他の高次元可積分方程式にも応用可能である. 厳密解を具体的に構成でき, Lax 対を得ることも可能な場合がある. また一部の方程式では, 独立変数と従属変数を取り替える変換の下で, 変数係数を定数係数に還元できる場合も発見されている [19].

3.3 変形３: 非可換化

ここでいう「非可換化」とは「非可換空間上への拡張」を指す. 非可換空間は座標関数同士の積の非可換性で特徴づけられるが, この関係式は, 量子力学の正準交換関係に類似しており, 「空間座標の不確定性関係」を導く. したがって非可換空間上では, 粒子の位置は完全に決めることができず, ある広がった分布を持つ. その結果, 可換な空間上では存在した場の特異点が, 非可換空間上では解消されるということが起こりうる. これは素朴な考察にすぎないが, 非可換空間上の場の理論では, 特異点の解消が一般に実際起こり, その結果として, 例えば, $U(1)$ インスタントンといった新しい物理的対象が現れる. 非可換空間上のゲージ理論は, 背景磁場 (B 場) 中の D-brane の有効理論として近年非常に精力的に調べられている [20]. 特に非可換 4 次元空間上の自己双対なゲージ場の配位 (非可換インスタントン) は ADHM 構成法によって具体的に厳密に構成され, 対応する D-brane の性質についても理解が進んだ. これは（反）自己双対 Yang-Mills 方程式が非可換空間でも「解ける」すなわち「可積分である」ことを意味する [21].

一方, より低次元の可積分系（ソリトン方程式）として, KdV 方程式, KP 方程式といったものが多数知られている. これらの非可換化についても, 特異点の解消から新しい物理的対象が現れることは十分期待されるが, その体系的研究はこれまでほぼ皆無であった. 非可換空間上の場の方程式というのは無限階かつ無限個微分方程式で記述され, それが解けるという状況はむしろ奇跡に近いのである.

ところが, これらの可積分系（ソリトン方程式）は, 4 次元の（反）自己双対 Yang-Mills 方程式の次元還元によって (ほとんど全て) 得られることが知られている (**Ward** 予想)[4]. これと（反）自己双対 Yang-Mills 方程式の非可換化の成功を合わせると, KdV 方程式, KP 方程式, CBS 方程式といったソリトン方程式の非可換化も非常に面白いものと期待される. 次元還元によって得られた方程式は, 付随する Lax 対を用いて記述できることが知られている. Lax 対を持つ方程式の多くは可積分性が期待されるのである [5].

このような背景の下で, 筆者と共同研究者は非可換空間上の Lax 対の生成法を提唱し, 様々な新しい非可換

Lax 対を見出した [12, 22, 23]. これらの方程式は既知の非可換可積分方程式とちょうど一致し, 可積分系の非可換化の一意性を示唆している. この時, 座標が普通の数でないと思うかわりに, 積が普通の積でない考える. その 普通でない積 に $\star$-積を採用する. その $\star$-積[14] は

$$(f \star g)(x) \equiv \exp\left[\frac{i}{2}\theta^{ij}\frac{\partial}{\partial\xi^i}\frac{\partial}{\partial\eta^j}\right] f(x+\xi)g(x+\eta)\Big|_{\xi=\eta=0} \quad (32)$$

で与えられる. ただし, θ^{ij} は実数とする（ここで x は普通の数, ∂_i なども普通の微分である）. $\theta^{ij} \to 0$ のとき, $\star$-積は通常の積に戻る. これを可換極限と呼ぶことにする. ここでも KdV 方程式を例にとり [12, 22], 非可換空間化を説明する.

時空の非可換性を

$$[t,\ x] = i\theta \quad (33)$$

とする. θ は実数である. KdV 方程式の Lax 対を

$$\begin{cases} L_{\mathbf{KdV}} &= \partial_x^2 + u(x,t), \\ T_{\mathbf{KdV}} &= \partial_x L_0 + T' + \partial_t \end{cases} \quad (34)$$

とする. ここで $\partial_x L_{\mathbf{KdV}} = \partial_x^3 + u\partial_x + u_x$ であり, また T' は現時点では未知演算子である. そして非可換空間上の Lax 方程式を

$$[L,T]_\star \equiv L\star T - T\star L = 0 \quad (35)$$

と約束すると,

$$\begin{aligned} 0 = [L,\ T]_\star &= [\partial_x^2 + u, \partial_x^3 + u\partial_x + u_x + T' + \partial_t]_\star \\ &= -u_x\partial_x^2 - (u_t + u_x \star u) \\ &\quad + [\partial_x^2 + u, T']_\star \end{aligned} \quad (36)$$

より, 上式の第 1 項と最終項に着目すると

$$T' = A\partial_x + B \quad (37)$$

とおける. ただし, A と B は $u, u_x, u_{xx}, \cdots$ の多項式でかけるはずである. このとき最終項より,

$$\begin{aligned} [\partial_x^2 + u, T']_\star &= [\partial_x^2 + u, A\partial_x + B]_\star \\ &= 2A_x\partial_x^2 + \Big(A_{xx} + 2B_x + [u,A]_\star\Big)\partial_x \\ &\quad + \Big(B_{xx} - Au_x + [u,B]_\star\Big) \end{aligned} \quad (38)$$

[14] 正確には $\star$-積はもっと一般的に定義されるものであるが, ここでは「非可換ユークリッド空間」のみを扱うので, このような具体的な表式で表すことができる. $\star$-積は普通の可換な関数（場）に対して定義される積の一つである.

を得る. よって, 上式 (36) と (38) から

$$A = \frac{1}{2}u, \quad (39)$$

$$B = -\frac{1}{4}u_x \quad (40)$$

が求まった[15]. つまり, 未知演算子 T' は

$$T' = \frac{1}{2}u\partial_x - \frac{1}{4}u_x \quad (41)$$

となり, このとき 非可換 Lax 対は

$$\begin{cases} L_{\mathbf{KdV}} &= \partial_x^2 + u(x,t), \\ T_{\mathbf{KdV}} &= \partial_x^3 + \frac{3}{2}u\partial_x + \frac{3}{4}u_x \end{cases} \quad (42)$$

である. そして 非可換 KdV 方程式

$$u_t + \frac{1}{4}u_{xxx} + \frac{3}{4}(u\star u)_x = 0 \quad (43)$$

が導出される. 可換極限（$\theta \to 0$）をとれば, 通常（つまり可換空間上）の KdV 方程式 (12) に戻る.

可換空間の時と同様に, 非可換時空でも高次元化可能である.

時空の非可換性を

$$[x,\ z] = i\theta \quad (44)$$

で約束する. θ は実数である. KdV 方程式の Lax 対を

$$\begin{cases} L_{\mathbf{CBS}} &= \partial_x^2 + u(x,z,t), \\ T_{\mathbf{CBS}} &= \partial_z L_{\mathbf{CBS}} + T' + \partial_t \end{cases} \quad (45)$$

とする. ここで $\partial_z L_{\mathbf{CBS}} = \partial_x^2\partial_z + u\partial_z + u_z$ であり, また T' は現時点では未知演算子である.

そして非可換空間上の Lax 方程式 (35) より,

$$\begin{aligned} 0 = [L_{\mathrm{CBS}},\ T_{\mathrm{CBS}}]_\star &= -u_z\partial_x^2 - (u_t + u_z \star u) \\ &\quad + [L_{\mathrm{CBS}},\ T']_\star \end{aligned} \quad (46)$$

より, 上式の第 1 項と最終項に着目すると

$$T' = A\partial_x + B \quad (47)$$

とおける. ただし, A と B は $u, u_x, u_{xx}, \cdots$ の多項式でかけるはずである. このとき最終項に代入することで, 未知演算子 T' が

$$\begin{aligned} T' &= \frac{1}{2}(\partial_x^{-1}u_z)\partial_x - \frac{1}{4}u_z \\ &\quad -\frac{1}{4}\partial_x^{-1}\Big([u, \partial_x^{-1}u_z]_\star\Big) \end{aligned} \quad (48)$$

[15] 今回も積分定数が A, B のそれぞれに付く. しかし今の場合それらは適当なスケール変換で消すことができる.

と求まる．このとき 非可換 Lax 対は

$$\begin{cases} L_{\mathbf{CBS}} &= \partial_x^2 + u(x,z,t), \\ T_{\mathbf{CBS}} &= \partial_x^2\partial_x + u\partial_z + \frac{3}{4}u_z + \frac{1}{2}(\partial_x^{-1}u_z)\partial_x \\ & \quad -\frac{1}{4}\partial_x^{-1}\left([u,\partial_x^{-1}u_z]_\star\right) + \partial_t \end{cases} \tag{49}$$

であり，非可換 CBS 方程式は

$$\begin{aligned} & u_t + \frac{1}{4}u_{xxz} + \frac{1}{4}(u\star u)_z \\ & +\frac{1}{4}\left(u\star(\partial_x^{-1}u_z) + (\partial_x^{-1}u_z)\star u\right)_x \\ & +\frac{1}{4}\left[u,\partial_x^{-1}\left([u,\partial_x^{-1}u_z]_\star\right)\right]_\star = 0 \end{aligned} \tag{50}$$

となる．可換極限（$\theta \to 0$）をとれば，通常の CBS 方程式 (22) に戻る．

この非可換空間上のソリトン方程式は，佐藤理論 [24] を用いると，非可換 KP 方程式を中心とした非常にきれいな定式化が可能である [25].

4. 離散（差分）系の可積分性について

本小論のはじめに，有限 及び 無限自由度の非線形連続系の可積分性について簡単にまとめた．無限自由度の連続系になると「可積分性」と呼ばれる概念がはっきりしない．それでは非線形離散（差分）系に関する可積分性はどうであろうか？[26]　実は連続系以上に確立されていない．無限自由度の連続系の場合と比べてみよう；

1. **Lax** 対の存在:
   Lax 対は多くの離散方程式に対して構成されているが，非常に形式的である．
2. **Liouville-Arnold** の意味での「可積分性」:
   確立された離散時間 Hamilton 系の概念が未だない（と思う）．
3. 無限個の保存量・対称性の存在:
   Lax 対が存在すれば形式的には保存量（保存密度）は作れる．対称性に関する研究は最近流行の離散 Painlevé 方程式 [27] に関するものしか知られていない．
4. 厳密解の存在:
   広田の直接法や Bäcklund 変換などにより（N-ソリトン解のような）広いクラスの厳密解の存在は多くの離散方程式に対して示されている[16]．
5. **Painlevé** 性:
   離散系の Painlevé 性に相当する概念は何だろうか？実は「特異点閉じ込め」と呼ばれる性質がそれであると主張されている [28].

当然のことながら，これらの性質の同値性はほとんど議論されていない．従って連続系以上に離散系では，何をもって可積分と称するかが，全くはっきりしていない．

[16] 連続系における状況と似通っている（多分）唯一の性質であろう．

5. 結言

可積分系といえども，その「可積分性」の本質は背後の代数的な構造にあり，解析的な性質の解明はまた別問題である．すなわち，ほとんどの場合，考えている方程式が可積分だとしても，一般の初期値問題が「解ける」わけではない．本小論では可積分性を示すと信じられている性質を利用した変形問題についての筆者の最近の研究を紹介した．「高次元化」及び「変数係数化」された可積分方程式は，これまでの可積分系で培われた様々な手法を用いて，厳密解 や 保存量を求めることができる．しかし，「非可換化」はそれほど単純ではない．厳密解は未だに非可換 Burgers 方程式を除いて成功していない [23]．解を求められない理由は非常にはっきりしていて，$\star$-積がその定義 (32) から明らかなように，無限階かつ無限個の微分を含むからである．また，空間の非可換性より初期値という概念も不明瞭である．これは今後の研究で明らかにする必要がある．

ところで，厳密な意味では可積分系ではないが，充分近い系が存在する．これらの系は摂動を用いて解析することができる．この摂動を体系化したものがソリトン摂動論という [8]．摂動項 $F(u)$ をもつ KdV 方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = \epsilon F(u) \tag{51}$$

を例にとる．$\epsilon = 0$ の場合は通常の KdV 方程式 (1) である．KdV 方程式の固有値問題を利用して，摂動項がある場合も解析することができる[17]．このソリトン摂動理論は応用上大変重要な手法であるが，その適法範囲を調べる研究 や 高次元ソリトン系に関する研究などは全く進んでいない．最近，筆者はこのソリトン摂動理論の高次元版に関する研究を進めている．また，「超対称性をもつ場合への変形」や「可積分な浅水波のモデル方程式を利用した津波の挙動の数理的解析」も行っている．

本小論で紹介した筆者の研究は，可積分系が変形される際の 世襲される性質と 消滅する性質 及び 新しく生まれる性質を探求している．現在までに数理工学や数理科学の多くの局面に「可積分系の数理構造」があるだけでなく，可積分系の方法論の有効性が広く認識されるよ

[17] 摂動論であるので，この結果が有効な時間範囲は限られている．

うになってきた．今後も更にこの独自性の高い研究テーマを推進したい．

謝辞

兪 成周氏（大阪情報コンピュータ専門学校），浜中 真志氏（名大・多元数理），小林 匡氏（ローム株式会社・LSI IP 開発部）との共同研究は大変有意義なものであった．三氏に深く感謝する．

本研究は，財団法人 富山第一銀行奨学財団 及び 科研費（若手 B: 15740242）の補助により進められたものであることを附記しておく．

参考文献

[1] この定理についての文献はいろいろある．ここでは可積分系について詳しく論述しているものを紹介しておく：

- 大貫 義郎・吉田 春夫 (1994):「力学」(岩波講座現代の物理学１), 234 ページ, 岩波書店.

[2] C. S. Gardner, J. M. Greene, M. D. Kruskal and R. M. Miura (1967): Method for solving the Korteweg-de Vries equation, *Phys. Rev. Lett.*, **19**, pp.1095-1097.

[3] P. D. Lax (1968): Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves, *Comm. Pure. Appl. Math.*, **21**, pp.467-490.

[4] （反）自己双対 Yang-Mills 方程式と可積分系との関係は，その深層に Twistor 幾何学がある：

- R.S. Ward (1985): Integrable And Solvable Systems, And Relations Among Them, *Phil. Trans. Roy. Soc. Lond. A*, **315**, pp.451-457.
- L.J. Mason and N.M. Woodhouse (1996): *Integrability, Self-Duality, and Twistor Theory* (London Mathematical Society monographs, new series: 15), 364pages, Oxford UP.
- L. Mason and Y. Nutku (2003): *Integrability, Self-Duality, and Twistor Theory* (London Mathematical Society Lecture Note Series 295), 153pages, Cambridge UP.

[5] M. Blaszak (1998): 「*Multi-Hamiltonian Theory of Dynamical Systems*」, 350pages, Springer-Verlag.

[6] 広田 良吾 (1992):「直接法によるソリトンの数理」, 202 ページ, 岩波書店.

[7] Painlevé 性 及び Painlevé 方程式に関する文献はたくさんあるが，筆者がいつも参考にするもののみ挙げることにする：

- 岡本 和夫 (1985):「パンルヴェ方程式序説」（上智大学数学講究録 N0. 19）, 274 ページ, 上智大学数学教室.
- M. J. Ablowitz and P. A. Clarkson (1991): 「Solitons, Nonlinear Evolution Equations and Inverse Scattering」, 516pages, Cambridge University Press.

[8] 川原 琢治 (1993):「ソリトンからカオスへ」, 214 ページ, 朝倉書店.

[9] R. Conte（編）(2000):「*The Painlevé Property* One Century Later」, 810pages, Springer-Verlag.

[10] 戸田 晃一（2002）: Painlevé 性–可積分判定法という観点から–, 慶應義塾大学 日吉紀要 自然科学, 第 **32** 巻, pp.1-37.

[11] これらの定義についての文献もいろいろある．代表的なものを挙げておく：

- V. E. Zakharov（編）(1990):「What Is Integrability?」, 321pages, Springer-Verlag.
- 和達 三樹 (1992):「非線形波動」(岩波講座現代の物理学１４), 233 ページ, 岩波書店.

[12] K. Toda (2002): Extensions of soliton equations to non-commutative $(2+1)$ dimensions, *JHEP*, PrHEP unesp2002/38.

[13] non-isospectral 問題はあまり研究が進んでいない．本当は非常に重要な問題であり，これからの研究の進展が待たれる：

- O. I. Bogoyavlenskii (1990): Overturning solitons in new two-dimensional integrable equations, *Math. USSR-Izv.*, **34** pp.245-259.
- P. A. Clarkson, P. R. Gordoa and A. Pickering (1997): Multicomponent equations associated to non-isospectral scattering problems, *Inv. Prob.*, **13**, pp.1463-1476.
- P. R. Gordoa and A. Pickering (1999): Non-isospectral scattering problems: A key to integrable hierarchies, *J. Math. Phys.*, **40**, pp.5749-5786.
- P. G. Estévez (2001): A nonisospectral problem in $(2+1)$ dimensions derived from KP, *Inv. Prob.*, **17**, pp.1043-1052.

[14] S-J. Yu, K. Toda, N. Sasa and T. Fukuyama (1998): N soliton solutions to the Bogoyavlenskii-Schiff equation and a quest for the soliton solution in $(3+1)$ dimensions, *J. Phys. A*, **31**, pp.3337-3343.

[15] S-J. Yu, K. Toda, and T. Fukuyama (1998): N-soliton solutions to a $(2+1)$-dimensional integrable equation, *J. Phys. A*, **31**, pp.10181-10186.

[16] K. Toda, Yu, S and T. Fukuyama (1999): The Bogoyavlenskii-Schiff Hierarchy and Integrable Equations in $(2+1)$ Dimensions, *Rep. Math. Phys.* **44**, pp.247-254.

[17] 非常に多くの研究があり，ほんの一部のみ挙げておく：

- F. Calogero and A. Degasperis (1978): Exact solution via the spectral transform of a generalization with linearly x-dependent coefficients of the modified Korteweg-de Vries equation, *Lett. Nuovo. Cimento* **22**, pp.270-279.
- T. Brugarino and P. Pantano (1980): The integration of Burgers and Korteweg-de Vries equations with nonuniformities, *Phys. Lett. A* **80**, pp.223-224.

- W. Oevel and W.-H. Steeb (1984): Painlevé analysis for a time-dependent Kadomtsev-Petviashvili equation. *Phys. Lett. A* **103**, pp.239-242.
- W.-H. Steeb and J. A. Louw (1985): Parametrically driven Sine-Gordon equation and Painlevé test. *Phys. Lett. A* **113**, pp.61-62.
- T. Chou (1987): Symmetries and a hierarchy of the general KdV equation. *J. Phys. A* **20**, pp.359-366.
- T. Chou (1987): Symmetries and a hierarchy of the general modified KdV equation. *J. Phys. A* **20**, pp.367-374.
- N. Joshi (1987): Painlevé property of general variable-coefficient versions of the Korteweg-de Vries and non-linear Schrödinger equations, *Phys. Lett. A* **125**, pp.456-460.
- T. Brugarino (1989): Painlevé property, auto-Bäcklund transformation. Lax pairs, and reduction to the standard form for the Korteweg-de Vries equation with nonuniformities, *J. Math. Phys.* **30**, pp.1013-1015.
- T. Brugarino and A. M. Greco (1991): Painlevé analysis and reducibility to the canonical form for the generalized Kadomtsev-Petviashvili equation, *J. Math. Phys.* **32**, pp.69-72.
- M. Wang, Y. Wang and Y. Zhou (2002): An auto-Bäcklund transformation and exact solutions to a generalized KdV equation with variable coefficients and their applications. *Phys. Lett. A* **303**, pp.45-61.
- R. C. Cascaval (2002): Variable Coefficient KdV Equations and Waves in Elastic Tubes, *Preprint*, 2002.

[18] J. Weiss, M. Tabor and G. Carnevale (1983): The Painlevé property for partial differential equations. *J. Math. Phys.* **24**, pp.522-526.

[19] 現在までに二本の論文がある:

- T. Kobayashi and K. Toda (2004): Extensions of nonautonomous nonlinear integrable systems to higher dimensions, *Proceedings of 2004 International Symposium on Nonlinear Theory and its Applications"*, Volume 1, pp.279-282.
- T. Kobayashi and K. Toda (2005): Extensions of nonautonomous soliton equations to higher dimensions, *Preprint*, 78pages.

[20] 非常に多くの研究があり，現在も活発に進んでいる．ここでは，代表的な文献のみ挙げる:

- D.J. Gross and N.A. Nekrasov (2000): Monopoles and strings in noncommutative gauge theory, *JHEP*, **7**, PP.34-44.
- N.A. Nekrasov (2000): Noncommutative instantons revisited, `hep-th/0010017`.
- K. Furuuchi (2000): Topological charge of U(1) instantons on noncommutative $\mathbf{R}^4$, `hep-th/0010006`.
- N.A. Nekrasov (2000): Trieste lectures on solitons in noncommutative gauge theories, `hep-th/0011095`.
- J.A. Harvey (2001): Komaba lectures on non-commutative solitons and D-branes, `hep-th/0102076`.
- O. Lechtenfeld and A.D. Popov(2001): Non-commutative multi-solitons in $2+1$ dimensions, *JHEP*, **0111**, pp.40-62.
- K.C. Hannabuss (2001): Non-commutative twistor space, *Lett. Math. Phys.*, **58**, pp.153-161.
- A. Kapustin, A. Kuznetsov and D. Orlov (2001): Noncommutative instantons and twistor transform, *Commun. Math. Phys.*, **221**, pp.385-432.
- M.R. Douglas and N.A. Nekrasov (2002): Non-commutative field theory, *Rev. Mod. Phys.*, **73**, pp.977-1029.
- I. Cabrera-Carnero and M. Moriconi (2002): Noncommutative integrable field theories in 2d, `hep-th/0211193`.

[21] K. Takasaki (2001): Anti-self-dual Yang-Mills equations on noncommutative spacetime, *J. Geom. Phys.*, **37**, pp.291-306.

[22] M. Hamanaka and K. Toda (2003): Towards non-commutative integrable systems, *Phys. Lett. A*, **316**, pp.77-83.

[23] M. Hamanaka and K. Toda (2003): Noncommutative Burgers equation, *J. Phys. A*, **36**, pp.11981-11998.

[24] 佐藤理論に関するレビューは数少ない:

- M. Sato and Y. Sato (1982): Soliton equations as dynamical systems on infinite dimensional Grassmann manifold, *Nonlinear Partial Differential Equations in Applied Sciences*, North-Holland.
- Y. Ohta , J. Satsuma , D. Takahashi and T. Tokihiro (1988): An elementary introduction to Sato theory, *Prog. Theor. Phys. Suppl.*, **94**, pp.210-241.
- 戸田 晃一 (2003): 可換空間上の佐藤方程式, 富山県立大学紀要, 第 **13** 巻, pp.9-17.

[25] 非可換空間上の佐藤理論はまだ未完成である:

- M. Hamanaka and K. Toda (2004): Towards Noncommutative Integrable Equations, *Proceedings of Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, vol. 50*, pp.404-411.
- 戸田 晃一 (2004): 非可換空間上の可積分方程式について, 富山県立大学紀要, 第 **14** 巻, pp.18-26.

[26] 離散可積分系については現在活発に研究されている．その成果を紹介している本としては以下が挙げられる:

- 中村 佳正（編）(2000): 可積分系の応用数理, 316 ページ, 裳華房.
- 広田 良吾 (2001): 差分方程式講義（SGC ライブラリー８）, 167 ページ, サイエンス社.
- 広田 良吾, 高橋 大輔 (2003): 差分と超離散, 327 ページ, 共立出版.

[27] 野海 正俊 (2000): パンルヴェ方程式（すうがくの風景４）, 201 ページ, 朝倉書店.

[28] B. Grammaticos, A. Ramani and V. G. Papageorgiou (1991): Do integrable mappings have the Painleve property?, *Physical Review Letters*, **67**, pp.1825-1828.

Juxtaposing the incidental properties of the Integrable systems with my life

Kouichi TODA

Department of Liberal Arts and Sciences, Faculty of Engineering

Summary

Some aspects and deformations of the Integrable systems are reviewed, which we have studied.

Key Words: Integrable systems, Lax pairs, Painlevé test, *Lax-pair Generating Technique*