人生いろいろ，行列式もいろいろ

戸田 晃一 ・ アレン パーカー*†
（工学部教養教育）

教科書などに載っていないが，将来性があり数理構造も興味深い行列式について簡単に紹介する．

キーワード：行列式，ロンスキアン，パフィアン，非可換行列式，超行列式

1．緒言

ずっと取り組んできた問題に対して数学という言葉を用いて最終的な結果を出した時に，非常に大きな達成感と充実感を得る．しかし同時に，多くの場合に，その結果が表す自然[1]の姿に虚しさを感じる．自然科学は自然をさまざまな視点で解析する学問であるが，時として，得られる結果は夢のないものである．一方，人間の創作活動である音楽，文学，絵画などの芸術作品は，人々に感動を与え，時代を超えて愛される．自然という現実ではない虚構の世界であるが，はるかに大きな感動を多くの人々に与えるのは何故か？その理由の一つには，理屈などを抜きにして，単純に感性に訴えるものだからであろう．理屈を抜きにして，見ただけで心が豊かになるような“美”をもった数式を見つけることができれば，より多くの人が自然科学，特に数学や理論物理学に興味をもってもらえるのだろうが…[2]．そのような美しい数式を見つけたいと思いつつ，現実にはあまり人から興味をもってもらえない研究ばかりしている．

さて，本稿とは全く関係のない雑感をまたもや書いてしまった．ここからが本題である．今回は行列式について書きたい．とはいっても，学部で使う教科書に載っているようなことを書くつもりはない．ここでは，あまり巷では登場しない少し変わった行列式について，あまり数学的な詳細には触れずに，簡潔に紹介したい．

本稿の内容は，本学に学外研究員として滞在し共同研究を行った A. Parker 氏との議論が基となっている．我々は 1998 年以来，**浅水波を記述する可積分なモデル方程式（非線形偏微分方程式）がもつ数理的側面の『解析学 及び 代数学的手法』を用いた考察**という共同研究を行っている．浅水波という物理的現象を記述する方程式を研究対象としているが，その延長として，非可換代数 や 超代数により拡張された方程式についても研究を進めている．可積分な非線形偏微分方程式の多くは，行列式で記述できる厳密解をもつ．そしてその解空間の代数構造が，非常に興味深い数理構造をもっていることが広く知られている．よって，我々は現在の研究対象である非線形偏微分方程式の厳密解の構成に役立ちそうな“行列式”についての勉強を行った．その研究ノートを再編集し本稿を作成した[3]．

線形（型）[4] 代数に関する教科書は和書，洋書無数にある．ここでは，行列式の勉強 や 本稿を書くにあたり参考にした文献のみをまず最初に挙げておく [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16]．行列式自体が，歴史も古く，しかも数学の分野において日本人のお家芸の一つでもある．また，行列式の計算や歴史と日本古来の算術とを結びつけて論じることが可能である．しかし，本稿では一切歴史的な観点には触れない．その辺のことは先に挙げた参考文献中の幾つかで語られているので，興味のある方は是非それらを一読してほしい．

また余談であるが，A. Parker 氏は時間の使い方が非常に上手である．腕力で計算を推し進める時にはストイックになる．一方，問題点を打破するためのアイデア

---

*2006 年 1 月から 8 月まで本学に学外研究員として滞在した．
†School of Mechanical Systems and Engineering, University of Newcastle upon Tyne, Newcastle upon Tyne, NE1 7RU, UK.

[1] ここでいう自然とは，もちろん，ある問題設定をした非常に狭いものである．

[2] 自然科学の中でも，動植物の観察 や 天体観測などは老若男女を問わずに興味をもたれる．これはやはり感性に訴える部分が多いからではないだろうか．

[3] 本稿の内容を，2006 年 10 月に中国科学院（北京）において，大学院生（応用数学系）向けの集中講義で紹介した．

[4] 「線型」は，「函数」などと同様に，現在でも純粋数学の分野で頻繁に使われる．しかし，本稿では，基本的には「線形」を用いる．

を考えるときには，音楽を聞いたりスポーツをしたりと身体と精神をリラックスさせる．そして，家族 や 友人との時間を大切にする．決して無駄な時間[5] を作らない．

2. いろいろな行列式

記号の整理のために，行列式について簡単に復習する．

行列式 (*determinant*) とは，

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \tag{1}$$

や

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} \\ &\quad - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33} \end{aligned} \tag{2}$$

で与えられるスカラー量である．一般形は，

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \equiv \sum_{(i_1,\cdots,i_n)} \mathrm{sgn}(i_1, i_2, \cdots, i_n)\ a_{i_1 1}a_{i_2 2}\cdots a_{i_n n} \tag{3}$$

と定義できる．総和は $1, 2, \cdots, n$ の $n!$ 個の順列全てにわたる．

行列式 と 正方行列とを関連付けることができる[6]．正方行列 A[7]

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \tag{4}$$

に対して，関連する行列式を $\det A$, $|A|_{ij}$ や $|a_{ij}|$ という記号を用いて表す．また，

$$\frac{1}{\det A} = \int\cdots\int \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{\mathrm{d}z_j \mathrm{d}z_j^*}{2\pi i}\right) e^{-z^\dagger A z} \tag{5}$$

とガウス型積分で書くこともできる．ここで，z は複素ベクトル

$$z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_N \end{bmatrix}$$

である．行列式を外積代数 (*exterior algebra*) を用いて定式化することも可能であるが，本稿では紙数の都合で省略する．(この定式化は有用である．興味がある方は参考文献 [17, 18, 19] を参照してほしい.)

最後に，線形微分方程式論において大変有用なロンスキアン (*Wronskian*) を

$$\begin{aligned} &\mathrm{Wr}(f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x)) \\ &\equiv \begin{vmatrix} f_1 & f_1' & \cdots & f_1^{(n-1)} \\ f_2 & f_2' & \cdots & f_2^{(n-1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_n & f_n' & \cdots & f_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \\ &\equiv \left|\frac{\partial^{i-1} f_j(x)}{\partial x^{i-1}}\right|_{1\le i,j\le n} \end{aligned} \tag{6}$$

と定義しておく．

最低限の準備ができた．これから将来性があり数理構造も興味深い行列式について紹介していく．

2.1 パフィアン (*Pfaffian*)

パフィアン (*Pfaffian*) [8] は，非線形可積分系，とりわけ無限次元可積分系の研究者には馴染みの深いものである．特に日本人研究者は，広田 良吾氏による日本語の教科書 [5] の強い影響もあり，パフィアンを積極的に研究に用いている．A. Parker 氏の今回の滞在の理由の一つに，このパフィアンの計算方法，有効な公式などを習得することがあった．最近は広田氏の教科書の英語版 [12] も出版され，これからは世界中で急速に広まっていくものと期待している．

パフィアンの表現法にはいろいろあるが，

$$\mathrm{pf}(a,b),\quad (a,b),\quad \mathrm{pf}(a_1,a_2),\quad (a_1,a_2),\quad a_{12},\quad (1,2)$$

[5] ここでの無駄でない時間には，他人からは無駄に過ごしているように映る時間も含まれている．100 年以上前の文献 や 学部学生用教科書を目的なく眺めたりする．しかし，彼に言わせるとそういうところからアイデアは生まれる．これには同意する．実験を専門とする研究においては，成功する実験よりはるかに失敗する実験の方が多いはずである．同様に，理論を専門とする研究においては，じっくり (のんびり) と文献や書籍を眺めたり意味のない計算に費やせる時間が非常に重要である．

[6] 行列を用いて，新しい行列式を定義することも多い．

[7] 正方行列 A を，成分を用いて，$[a_{ij}]$ と書くこともある．

[8] この名は，線形微分方程式論のパッフ形式で著名な J. F. Pfaff に由来している．命名者は A. Cayley だそうである．

などが，研究者間でよく使われている．

この表現から分かる通り，パフィアンとは，二つの量によって第三の量として定まるものである．行列式とパフィアンとは類似点も多い[9]．行列式は成分の積の和で構成されているのと同様に，パフィアンも成分の積の和で構成される．行列式とパフィアンで基本的に異なる点は，

$$\mathrm{pf}(b,a)=-\mathrm{pf}(a,b) \tag{7}$$

と反対称性にある．よって，$b=a$ ならば，

$$\mathrm{pf}(a,a)=0 \tag{8}$$

である[10]．

$\mathrm{pf}(a,b)$ を次数 1 のパフィアンということにすると，次数 2 のパフィアンの表現は，

$$\mathrm{pf}(a_1,a_2,a_3,a_4),\quad (a_1,a_2,a_3,a_4),\quad a_{1234},\quad (1,2,3,4)$$

などと書かれる．そして，次数 2 のパフィアンは

$$(1,2,3,4)=(1,2)(3,4)-(1,3)(2,4)+(1,4)(2,3) \tag{9}$$

と，次数 1 のパフィアンに展開することにより定義される．次数 2 のパフィアンで二つの文字を入れ換えると，符号が変わる．例えば，

$$\begin{aligned}(3,2,1,4) &= (3,2)(1,4)-(3,1)(2,4)+(3,4)(2,1)\\ &= -(1,4)(2,3)+(1,3)(2,4)-(1,2)(3,4)\\ &= -(1,2,3,4)\end{aligned} \tag{10}$$

であり，これにより $3=1$ の時，

$$(1,2,1,4)=0 \tag{11}$$

である．このことは行列式において，二つの行（または列）が等しい時には，その値は 0 となることに対応していると考えることができる．

同様に，次数 3 のパフィアンの表現は

$$\mathrm{pf}(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6),\quad (a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6),$$
$$a_{123456},\quad (1,2,3,4,5,6)$$

などと書かれる．ここまでくると，最後尾の記号が一番簡単でよい．そして，次数 3 のパフィアンは

$$\begin{aligned}(1,2,3,4,5,6) = \;& (1,2)(3,4,5,6)-(1,3)(2,4,5,6)\\ & +(1,4)(2,3,5,6)-(1,5)(2,3,4,6)\\ & +(1,6)(2,3,4,5)\end{aligned} \tag{12}$$

と，次数 1 と次数 2 のパフィアンに展開することにより定義される．（もちろん，次数 2 のパフィアンは次数 1 のパフィアンに展開できる.）次数 3 のパフィアンにおいても，成分を表す二つの文字を入れ換えると符号が変わり，等しい時にはその値は 0 となることが，計算は少し面倒だが，確かめることができる．

ここで，次数 n のパフィアンを定義するために新しい記号 $\widehat{k}$ を導入する．この $\widehat{k}$ とは，**^の下の文字（数字）k を取り除くこと**を意味している．具体例を挙げると，

$$\begin{aligned}&(1,2,3,4)\\ =\;& (1,2)(\widehat{2},3,4)-(1,3)(2,\widehat{3},4)\\ & +(1,4)(2,3,\widehat{4})\\ =\;& \sum_{k=2}^{4}(-1)^k(1,k)(2,\cdots,\widehat{k},\cdots,4)\\ =\;& \sum_{k=1}^{4}(-1)^k(1,k)(\widehat{1},2,\cdots,\widehat{k},\cdots,4),\end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned}&(1,2,3,4,5,6)\\ =\;& (1,2)(\widehat{2},3,4,5,6)-(1,3)(2,\widehat{3},4,5,6)\\ & +(1,4)(2,3,\widehat{4},5,6)-(1,5)(2,3,4,\widehat{5},6)\\ & +(1,6)(2,3,4,5,\widehat{6})\\ =\;& \sum_{k=2}^{6}(-1)^k(1,k)(2,\cdots,\widehat{k},\cdots,6)\\ =\;& \sum_{k=1}^{6}(-1)^k(1,k)(\widehat{1},2,\cdots,\widehat{k},\cdots,6)\end{aligned} \tag{14}$$

という具合である．

一般に次数 n のパフィアン $(1,2,3,4,\cdots,2n)$ は

$$\begin{aligned}&(1,2,3,4,\cdots,2n) \qquad (15)\\ &=\sum_{k=1}^{2n}(-1)^{j+k-1}(j,k)(1,2,\cdots,\widehat{j},\cdots,\widehat{k},\cdots,2n)\\ &\qquad\qquad (j=1,2,\cdots,2n)\end{aligned}$$

と定義できる．ここで注意が一つある．上述の定義式 (15) では，“形式的に”

$$(\cdots,\widehat{j},\cdots,\widehat{k},\cdots) \;=\; -(\cdots,\widehat{k},\cdots,\widehat{j},\cdots) \qquad (j<k) \tag{16}$$

[9] 当たり前のことであることがすぐに分かる．
[10] 著者は，何かを定義したり定式化する時には $\mathrm{pf}(a,b)$ を，計算過程では (a,b) を用いる．

と約束している．“形式的に”としたのは，$\widehat{\ }$ の下の文字（数字）は取り除かれているので，それらを入れ換えると符号が変わると約束するのはどうかと思うからである．そこで，新しいパフィアン

$$\mathrm{pf}(d_j, k) = \delta_{jk} \tag{17}$$

を導入する．このパフィアンは

$$\begin{aligned}&(d_j, d_k, 1, 2, \cdots, 2n) \\ &= (-1)^{j+k}(1, 2, \cdots, \widehat{j}, \cdots, \widehat{k}, \cdots, 2n)\end{aligned} \tag{18}$$

という性質をもつ．すると，次数 n のパフィアンの定義式 (15) は

$$\begin{aligned}&(1, 2, 3, 4, \cdots, 2n) \\ &= -\sum_{k=1}^{2n}(j, k)(d_j, d_k, 1, 2, \cdots, 2n) \\ &\qquad\qquad (j = 1, 2, \cdots, 2n)\end{aligned} \tag{19}$$

と書くことができる．

それでは，パフィアンと行列式の関係について紹介する．結果からいうと，**$2n$ 次の反対称行列式は次数 n のパフィアンの二乗**，つまり **パフィアンは反対称行列式の平方根である**[11]．まず，2 次の反対称行列式を例として説明すると，

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} 0 & a_{12} \\ -a_{12} & 0 \end{vmatrix} &= (a_{12})^2 \\ &= (1, 2)^2\end{aligned} \tag{20}$$

と 次数 2 のパフィアンの二乗になる．但し，$(1, 2) = a_{12} = -a_{21}$ とする．よって，

$$(1, 2) = \pm\sqrt{\begin{vmatrix} 0 & a_{12} \\ -a_{12} & 0 \end{vmatrix}} \tag{21}$$

と パフィアンは反対称行列式の平方根とみることができる．次に，4 次の反対称行列式を例とすると，

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & a_{24} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & a_{34} \\ -a_{14} & -a_{24} & -a_{34} & 0 \end{vmatrix} &= (a_{12}a_{34} - a_{13}a_{24} + a_{14}a_{23})^2 \\ &= (1, 2, 3, 4)^2\end{aligned} \tag{22}$$

[11] 行列式とパフィアンとは類似点が多い理由はここにある．また，線型 (形) 代数の教科書でパフィアンを説明する場合の決まり文句である．しかし，これがパフィアンは行列式の特別な場合であるという先入観をもたせる原因でもある．

であり，

$$(1, 2, 3, 4) = \pm\sqrt{\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & a_{24} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & a_{34} \\ -a_{14} & -a_{24} & -a_{34} & 0 \end{vmatrix}} \tag{23}$$

である．但し，$(j, k) = a_{jk} = -a_{kj}$ $(j, k = 1, 2, 3, 4)$ とする．

次に，行列式 と パフィアンの積とのおもしろい関係の 2 例を紹介する．

- $2n$ 次の反対称行列式

$$\mathcal{D} = |a_{ij}|_{1 \le i, j \le 2n}, \qquad a_{ij} = -a_{ji} \tag{24}$$

から i 行 j 列（$i < j$）を取り除いた行列式 $\mathcal{D}\begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix}$ は

$$\begin{aligned}\mathcal{D}\begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix} &= -(1, 2, \cdots, 2n) \\ &\quad \times \Big(1, 2, \cdots, \widehat{i}, \cdots, \widehat{j}, \cdots, 2n\Big)\end{aligned} \tag{25}$$

とパフィアンの積で表現される．例えば，$n = 2$, $i = 1$, $j = 3$ の時，4 次の反対称行列式は

$$\mathcal{D} = \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & a_{24} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & a_{34} \\ -a_{14} & -a_{24} & -a_{34} & 0 \end{vmatrix} \tag{26}$$

なので，それから 1 行 3 列の成分を取り除いた行列式は

$$\begin{aligned}\mathcal{D}\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} &= \begin{vmatrix} -a_{12} & 0 & a_{24} \\ -a_{13} & -a_{23} & a_{34} \\ -a_{14} & -a_{24} & 0 \end{vmatrix} \\ &= -(a_{12}a_{34} - a_{13}a_{24} + a_{14}a_{23})\, a_{24} \\ &= -(1, 2, 3, 4)(2, 4)\end{aligned} \tag{27}$$

となることは直ぐに確かめることができる．

- $2n$ 次の反対称行列式から i 行 j 列 及び $2n$ 行 $2n$ 列を取り除いた行列式 $\mathcal{D}\begin{bmatrix} i & 2n \\ j & 2n \end{bmatrix}$ は

$$\begin{aligned}\mathcal{D}\begin{bmatrix} i & 2n \\ j & 2n \end{bmatrix} &= \Big(1, 2, \widehat{i}, \cdots, 2n-1\Big) \\ &\quad \times \Big(1, 2, \widehat{j}, \cdots, 2n-1\Big)\end{aligned} \tag{28}$$

とパフィアンの積で表現される．例えば，$n=2$，$i=1$，$j=3$ の時，

$$\begin{aligned}\mathcal{D}\begin{bmatrix}1, & 4\\ 3, & 4\end{bmatrix} &= \begin{vmatrix}-a_{12} & 0\\ -a_{13} & -a_{23}\end{vmatrix}\\ &= a_{12}a_{23}\\ &= (2,3)(1,2) \qquad (29)\end{aligned}$$

となる．

パフィアンは行列式と同じか，もしかすると，それ以上に豊富な性質をもつ[12]．パフィアンの外積代数による定式化，パフィアンのラプラス展開，任意の行列式のパフィアン表現化，行列式の等式のパフィアンによる理解など，まだまだ多くの興味深い内容がある．しかし，紙数の都合により本稿で紹介することはできない．よって，ここでは，*Wronskian* のパフィアン表現だけを紹介するにとどめる．

Wronskian のパフィアン表現は

$$\begin{aligned}&\mathrm{Wr}(f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x)) \qquad (30)\\ &= (d_0, d_1, \cdots, d_{n-1}, n, n-1, \cdots, 1)\end{aligned}$$

で与えられる．但し，

$$\begin{cases}(d_j, k) = \dfrac{\partial^j f_k(x)}{\partial x^j} & (j=0,1,\cdots,n-1\\ & \quad k=1,2,\cdots,n),\\ (d_j, d_k) = 0 & (j,\ k=0,1,\cdots)\end{cases} \qquad (31)$$

である．例えば，$n=2$ の場合には，

$$\begin{aligned}&(d_0, d_1, 2, 1)\\ =\ & (d_0, d_1)(2,1) - (d_0, 2)(d_1, 1) + (d_0, 1)(d_1, 2)\\ =\ & -f_2(x)\frac{\partial f_1(x)}{\partial x} + f_1(x)\frac{\partial f_2(x)}{\partial x}\\ =\ & \begin{vmatrix}f_1 & f_1'\\ f_2 & f_2'\end{vmatrix}\\ =\ & \mathrm{Wr}(f_1(x), f_2(x)) \qquad (32)\end{aligned}$$

となる．

[12] これらの多くが，無限次元可積分系の厳密解の導出過程で指摘されたことが，非常に興味深い点である．

2.2 非可換行列式（*quasi-determinant*）

非可換行列式と呼ばれるものには複数あるが，本稿では，その中の一つである *quasi-determinant*[13] を取り上げる．この *quasi-determinant* とは，I. Gelfand と V. Retakh によって導入されたものであるが，正確にいうと，行列式そのものではなくそれに準じた概念である．

行列 $A=[a_{ij}]$ を $N\times N$ 行列とし，$B=[b_{ij}]$ を行列 A の逆行列とする．つまり，

$$B\star A = A\star B = 1 \qquad (33)$$

を満たす．ここで $\star$ 積についての厳密な定義はしない[14]が，**非可換**な積を示すこと，そして行列の成分同士の積も 非可換な $\star$ 積となることに注意しておいてほしい．

行列 A の *quasi-determinant* の正式な定義は

$$|A|_{ij} \equiv b_{ji}^{-1} \qquad (34)$$

である．つまり，行列 A の逆行列 $B=A^{-1}$ の成分の逆数として定義できる[15]．可換な場合には，

$$|A|_{ij} = (-1)^{i+j}\frac{\det A}{\det \tilde{A}^{ij}} \qquad (35)$$

となる．但し，行列 $\tilde{A}^{ij}$ は行列 A の i 番目の行と j 番目の列を取り除いて作った行列である．つまり，符号を無視すると，行列式をサイズ一つ小さい余因子で割ったものになっている．

quasi-determinant をより具体的に書き下すことも可能である．それには，正方行列のブロック分け

$$\begin{aligned}&\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}^{-1} \qquad (36)\\ &= \begin{pmatrix}(A-B\star D^{-1}\star C)^{-1} & -A^{-1}\star B\star X\\ X\star C\star A^{-1} & X\end{pmatrix}\end{aligned}$$

を用いる．但し，行列 A と D は正方行列，$X=(D-C\star A^{-1}\star B)^{-1}$ である．ここで，全ての行列が，このブロック分けにより，2×2 行列にできことを思い出してほしい．ブロック分けにより，帰納的に，*quasi-determinant* $|A|_{ij}$ は

$$|A|_{ij} = a_{ij} - \sum_{i'(\neq i), j'(\neq j)} a_{ii'}\star(|\tilde{A}^{ij}|_{j'i'})^{-1}\star a_{j'j} \qquad (37)$$

[13] 日本語を無理にあてると，準行列式とでもなるか．しかし，ここでは無理に和名を付けずに *quasi-determinant* と呼ぶことにする．
[14] 我々の研究では，この $\star$ 積を Moyal 積であると考える．
[15] ややこしい…．

と定義できる．また，記号としては，

$$|A|_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & & \boxed{a_{ij}} & & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{38}$$

と書かれることが多い．

実際に書いてみると，例えば，

- 1×1 行列 $A = a$ の時：

  $|A| = a$

- 2×2 行列 $A = [a_{ij}]$ の時：

$$|A|_{11} = \begin{vmatrix} \boxed{a_{11}} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} - a_{12} \star a_{22}^{-1} \star a_{21},$$

$$|A|_{12} = \begin{vmatrix} a_{11} & \boxed{a_{12}} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{12} - a_{11} \star a_{21}^{-1} \star a_{22},$$

$$|A|_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ \boxed{a_{21}} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{21} - a_{22} \star a_{12}^{-1} \star a_{11},$$

$$|A|_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & \boxed{a_{22}} \end{vmatrix} = a_{22} - a_{21} \star a_{11}^{-1} \star a_{12},$$

- 3×3 行列 $A = [a_{ij}]$ の時：

$$\begin{aligned} |A|_{11} &= \begin{vmatrix} \boxed{a_{11}} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= a_{11} \\ &- (a_{12}, a_{13}) \star \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}^{-1} \star \begin{pmatrix} a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} \\ &= a_{11} \\ &\quad -a_{12} \star \begin{vmatrix} \boxed{a_{22}} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}^{-1} \star a_{21} \\ &\quad -a_{12} \star \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ \boxed{a_{32}} & a_{33} \end{vmatrix}^{-1} \star a_{31} \\ &\quad -a_{13} \star \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ \boxed{a_{32}} & a_{33} \end{vmatrix}^{-1} \star a_{21} \\ &\quad -a_{13} \star \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & \boxed{a_{33}} \end{vmatrix}^{-1} \star a_{31}, \end{aligned}$$

など[16]．

となる．

最後に，*quasi-determinant* の *Wronskian* にあたる *quasi-Wronskian* について簡単に紹介しておく．

quasi-Wronskian $\mathrm{Wr_q}(i,j)$ は

$$\mathrm{Wr_q}(i,j) \equiv \begin{vmatrix} F & e_{n-j} \\ f^{(n+i)} & 0 \end{vmatrix} \tag{39}$$

と定義できる．但し，

$$F = \begin{bmatrix} f \\ f' \\ f'' \\ \vdots \\ f^{(n-i)} \end{bmatrix} \tag{40}$$

及び

$$e_r = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \tag{41}$$

である．$\mathrm{Wr_q}(i,j)$ の微分は，

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x_m}\mathrm{Wr_q}(i,j) \\ &= \frac{\partial}{\partial x_m}\begin{vmatrix} F & e_{n-j} \\ f^{(n+i)} & 0 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} F & e_{n-j} \\ f^{(n+i+m)} & 0 \end{vmatrix} \\ &\quad + \sum_{k=1}^{n} \begin{vmatrix} F & e_k \\ f^{(n+i)} & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} F & e_{n-j} \\ f^{(k-1+m)} & 0 \end{vmatrix} \\ &= \mathrm{Wr_q}(i+m,j) \\ &\quad + \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Wr_q}(i,n-k)\mathrm{Wr_q}(k-1+m-n,j) \\ &= \mathrm{Wr_q}(i+m,j) \\ &\quad + \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{Wr_q}(i,k)\mathrm{Wr_q}(m-1-k,j) \end{aligned} \tag{42}$$

となる．少し複雑なので，詳しめに計算過程を書いた．

[16] $|A|_{12}$ や $|A|_{13}$ など残り 8 個ある．

2.3 超行列式（*super-determinant*）

超行列式（*super-determinant*）[17] を定義する前に，グラスマン数について復習しておく [20, 21, 22, 23, 24, 25].

グラスマン数とは，**反交換**する数として定義される．つまり，グラスマン数として $\eta_i\ (i=1,2)$ を用意した時，

$$\eta_1\eta_2 = -\eta_2\eta_1 \tag{43}$$

を満たす．これより，明らかに，

$$\eta_i^2 = 0 \tag{44}$$

も成り立つ．（**補足 1** も参照.）

次に超行列を定義する[18]．a, b を複素数[19] を要素にもつ $N \times N$ 行列，α, β をグラスマン数を要素にもつ $N \times N$ 行列とする時，超行列 A_{S} は

$$A_{\mathrm{S}} \equiv \begin{bmatrix} a & \alpha \\ \beta & b \end{bmatrix} \tag{45}$$

で定義される．（**補足 2** も参照.） この超行列 A_{S} のトレース（**超トレース**）は

$$\mathrm{Str}\ A_{\mathrm{S}} \equiv \mathrm{tr}\ a - \mathrm{tr}\ b \tag{46}$$

で与えられ，超行列 A_{S} の行列式（**超行列式**，または **Berezinian**[20]）は

$$\mathrm{Sdet}\ A_{\mathrm{S}} \equiv \det\left(a - \alpha b^{-1}\beta\right)\det b^{-1} \tag{47}$$

と定義される[21]．この時，

$$\mathrm{Sdet}\,(A_{\mathrm{S}}B_{\mathrm{S}}) = \mathrm{Sdet}\ A_{\mathrm{S}} \cdot \mathrm{Sdet}\ B_{\mathrm{S}} \tag{48}$$

及び

$$\mathrm{Str}\,(\ln A_{\mathrm{S}}) = \ln\,(\mathrm{Sdet}\ A_{\mathrm{S}}) \tag{49}$$

を満たすことは簡単に示すことができる．また，超行列式 (47) は

$$\frac{1}{\mathrm{Sdet}\ A_{\mathrm{S}}} \tag{50}$$
$$= \int\cdots\int \prod_{j=1}^{n}(\mathrm{i}\mathrm{d}z_j\mathrm{d}z_j^*)\prod_{j=1}^{n}(\mathrm{d}\eta_j\mathrm{d}\eta_j^*)e^{-\Lambda}$$

とガウス型積分で書くこともできる．ここで，

$$\Lambda = \Phi^{\dagger}A\Phi \tag{51}$$

であり，Φ は超ベクトルで

$$\Phi = \begin{bmatrix} z \\ \eta \end{bmatrix} \tag{52}$$

と与えられる．今，z は複素ベクトル

$$z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_N \end{bmatrix} \tag{53}$$

で，η はグラスマン数ベクトル

$$\eta = \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_N \end{bmatrix} \tag{54}$$

である．

3. 結言

本稿では，我々の 2006 年の共同研究の内容の内で，もしかすると本学の他の方にも，今でなくとも近い将来に，役に立ちそうな “行列式” の紹介を行った．

パフィアンは，無限次元可積分系の研究を通して，本稿で紹介した “行列式” の中で現在最も活発に研究されている．*quasi-determinant* と超行列式は，これから活発に研究されるためには，無限次元可積分系の研究にどのように現れるかがポイントになるのではないだろうか．**無限次元可積分系**と呼ばれる方程式（系）は，非線形波動論 や 非線形微分方程式論においては**特殊な**ものであるが，豊富な数理構造 をもち，詳細に性質を調べることができる点で 学問上重要な意味をもつ．可積分模型に対する研究の多くは，現実の物理的な問題（現象）への直接的な応用を目指すのではなく，むしろ**理論がもつ構造の数理的理解**を高めて，数学や理論物理学における**一般的な教訓（知見）**を引き出すことを主目的としている．

また，ここで紹介した以外にも，四元数の行列式 や 立方行列式なども大変興味深く，これから役に立つ可能性が高そうな印象をもつ．

[17] 超行列式には，*hyper-determinant* と *super-determinant* の二つがある．本稿では後者について議論する．
[18] この超行列を用いて，トレースや行列式を定義する．
[19] 言うまでもないが，**可換**な数である．
[20] 創始者の F. A. Berezin の名にちなむ．
[21] $\det b^{-1}$ が存在することが，この行列式の存在条件となる．

謝辞

quasi-determinant についての有益な情報を教えて下さった浜中 真志氏（名古屋大学・多元），C. Gilson 氏（グラスゴー大学・数学） J. J. C. Nimmo 氏（グラスゴー大学・数学）に感謝します．

複数の文献を紹介して下さった高崎 金久氏（京都大学・人環）及び ランダム行列について議論して下さった児玉 裕治氏（オハイヨ州立大学・数学）の両氏に感謝します．

Institute of Mathematics（UK）及び The Daiwa Anglo-Japanese Foundation（Daiwa Foundation Japan House）よりの資金援助により，著者の一人（AP）が共同研究のために本学に滞在することが可能となりました．深く感謝します．

著者の家族の協力により実りの多い共同研究ができました．深く感謝します．

補足：

補 足 1： グラスマン数の補足

- **共役グラスマン数：**

グラスマン数 η_i $(i=1,2)$ に対して，共役グラスマン数 η_i^* を考えることができ，

$$(\eta_1\eta_2)^* = \eta_2^*\eta_1^*$$

及び

$$(\eta_i^*)^* = -\eta_i$$

を満たす．

- **グラスマン数に対する微積分：**

グラスマン数 η に対する微分を

$$\frac{\partial \eta_j}{\partial \eta_i} \equiv \delta_{ij}$$

と定義する．この時，

$$\frac{\partial}{\partial \eta_i}\eta_j = -\eta_j\frac{\partial}{\partial \eta_i}$$

及び

$$\frac{\partial}{\partial \eta_i}\eta_j + \eta_j\frac{\partial}{\partial \eta_i} = \delta_{ij}$$

を満たすことは簡単に示すことができる．

グラスマン数 η に対する積分を

$$\int \mathrm{d}\eta\ f(\eta) \equiv \frac{\partial f(\eta)}{\partial \eta}$$

と定義する．例えば，

$$\int \mathrm{d}\eta = \int \mathrm{d}\eta^* = 0,$$

$$\int \mathrm{d}\eta\ \eta = \int \mathrm{d}\eta^*\ \eta^* = 1$$

となる．

補 足 2： 超行列の補足

- **転置行列：**

超行列 A_S の転置行列 ${}^\mathrm{t}A_\mathrm{S}$ は

$${}^\mathrm{t}A_\mathrm{S} = \begin{bmatrix} {}^\mathrm{t}a & {}^\mathrm{t}\beta \\ -{}^\mathrm{t}\alpha & {}^\mathrm{t}b \end{bmatrix}$$

と定義される．明らかに，

$${}^\mathrm{t}\left({}^\mathrm{t}A_\mathrm{S}\right) \neq A_\mathrm{S}$$

であるが，超ベクトル Φ に対して，

$${}^\mathrm{t}\left(A_\mathrm{S}\Phi\right) = {}^\mathrm{t}\Phi\ {}^\mathrm{t}A_\mathrm{S}$$

となる．

- **エルミート行列：**

超行列 A_S の各成分の複素共役をとったものを共役行列 A_S^* と呼ぶ．

共役行列 A_S^* の転置

$$A_\mathrm{S}^\dagger = {}^\mathrm{t}\left(A_\mathrm{S}^*\right)$$

をエルミート共役と定義する．

また，

$$A_\mathrm{S}^\dagger = A_\mathrm{S}$$

の時，超行列 A_S をエルミート行列と呼ぶ．

参考文献

[1] 佐武 一郎 (1958)： 線型代数 (ISBN 4785313013), 裳華房.

[2] F. A. Berezin and A. A. Kirillov(1987)： Introduction to Superanalysis(ISBN 9027716684), D Reidel.

[3] I. Gelfand and V. Retakh(1991)： Determinants of matrices over noncommutative rings, Funct. Anal. Appl. **Vol. 25**, (1991) 91.

[4] I. Gelfand and V. Retakh(1992)： Theory of noncommutative determinants, and characteristic functions of graphs, Funct. Anal. Appl. **Vol. 26**, 231.

[5] 広田 良吾 (1992)： 直接法によるソリトンの数理 (ISBN 400005676X), 岩波書店.

[6] 数理科学 1995 年 4 月号, 特集「行列式の進化」, サイエンス社.

[7] R. Vein and P. Dale(1998)： Determinants and Their Applications in Mathematical Physics(ISBN 0387985581), Springer.

[8] 勝田 篤 (1998)： 線形代数学 1-正比例からの線形代数-(ISBN 4563006335), 培風館.

[9] 中村 佳正, 渡辺 芳英, 西成 活裕, 松木平 淳太, 永井 敦, 辻本 諭, 佐々 成正, 梶原 健司 (2000)： 可積分系の応用数理 (ISBN 4785315202), 裳華房.

[10] T. Muir and W. H. Metzler(2003)： A Treatise on the Theory of Determinants(ISBN 0486495531), Dover.

[11] 広田 良吾 (2004)： 機関誌「応用数理」集中連載「行列式とパフィアン」, 日本応用数理学会.

[12] R. Hirota, A. Nagai, C. Gilson and J. J. C. Nimmo(2004)： The Direct Methods in Soliton Theory(ISBN 0521836603), Cambridge.

[13] 永尾 太郎 (2005)： ランダム行列の基礎 (ISBN 4130613065), 東京大学出版会.

[14] I. Gelfand, S. Gelfand, V. Retakh and R. L. Wilson(2005)： Quasideterminants, Adv. Math. **Vol. 193**, 56.

[15] 高崎 金久 (2006)： 理工系 線形代数入門 (ISBN 456300359X), 培風館.

[16] M. Hamanaka(2006)： Notes on Exact Multi-Soliton Solutions of Noncommutative Integrable Hierarchies, *hep-th/0610006*.

[17] H.P. スウ, 高野 一夫 (1980)： 工学基礎演習シリーズ 2 ベクトル解析 (ISBN 4627930208), 森北出版.

[18] 和達 三樹 (1996)： 微分・位相幾何 理工系の基礎数学 (ISBN 4000079808), 岩波書店.

[19] 長谷川 浩司 (2004)： 線型代数 (ISBN 4535783713), 日本評論社.

[20] M.S. スワンソン, 青山 秀明, 和田 信也, 川村 浩之 (1996)： 経路積分法—量子力学から場の理論へ (ISBN 4842702583), 吉岡書店.

[21] 杉田 勝実, 岡本 良夫, 関根 松夫 (1998)： 経路積分と量子電磁力学 (ISBN 4627782713), 森北出版.

[22] 中原 幹夫 (1998): 東京大学数理科学セミナリーノート 15 経路積分とその応用, 友隣社.

[23] ミチオ カク, 太田 信義 (2000): 超弦理論と M 理論 (ISBN 4431708677), シュプリンガー・フェアラーク東京.

[24] 柏 太郎 (2001): 臨時別冊・数理科学 SGC ライブラリ 12 演習 場の量子論, サイエンス社.

[25] S. ワインバーグ, 青山 秀明, 杉山 勝之, 有末 宏明 (2003): ワインバーグ場の量子論〈6 巻〉超対称性: 非摂動論的効果と拡張 (ISBN 4842702931), 吉岡書店.

A simple review of determinants

Kouichi TODA and Allen PARKER [*] [†]

Department of Liberal Arts and Sciences, Faculty of Engineering

Summary

Mathematics of fundamental determinants are already well-known, such as *Wronskian*, *Grammian*, and *Hankelian*. In this paper unfashionable but promising determinants are briefly reviewed.

Key Words: *determinants*, *Pfaffian*, *quasi-determinant*, *super-determinant*

[*]Visiting researcher from 12 January to 31 August, 2006.
[†]School of Mechanical Systems and Engineering, University of Newcastle upon Tyne, Newcastle upon Tyne, NE1 7RU, UK.