人生いろいろ，線形問題もいろいろ

戸田 晃一 ・ Luiz Agostinho FERREIRA *
（工学部 教養教育）

日本語で初めて書かれた**非等スペクトル線形問題**についての紹介である（と思う）.

キーワード： 可積分階層，非等スペクトル線形問題，ソリトン方程式，ゲージ理論

1. はじめに

邯鄲（かんたん）の夢という故事があるそうである. 2006 年 10 月に西安で開催された国際会議に参加し，その後に中国科学院内のとある研究所に滞在し，集中講義をする機会があった. そのために西安から鉄道で中国人の研究者仲間と北京に移動中に，この故事に所縁のある駅に停車した際に教えてもらった. 故事の意味を要約すると，

> 道士（仙人？）の枕で眠った男が自分の身に起こった長期間の出来事に関する良夢をみたが，起きたら米も炊けていないほど短時間の睡眠であった. それくらい人生は短いのだと悟り修行の道に入った

ということらしい[1]. つまり，人生ははかないといことだろうか. 富山に来て，6 回目の冬を迎えた. 長女も 4 月には小学生となる. この過ぎ去った 5 年間を振り返った時に，決して良い父親ではなかったと思う. およそ家庭人からはほど遠い生活をしている. それでは，子供達に自分の仕事ぶりを誇れるか？ それにも今のところ自信がない. などとこの故事を聞いてから，自分のこれまでの人生を振り返っているうちに，子供達は私のことを尊敬できるところがあるのか？と考えることが多くなった. 今ならまだ間に合うかもしれない. 人生の終焉を迎えるとき，後悔しないようにしたい $\cdots$.

さて，いつものように雑感から入ったが，ここからが本題である.

2007 年 11 月から 40 日間，日本学術振興会 及び ブラジル科学アカデミーの招聘により，著者の一人（KT）はサンパウロ大学サンカルロス校物理学教室（及び サンパウロにある理論物理学研究所）に滞在した. その際に以下の 2 テーマ：

- **非可換空間上の可積分方程式の保存量 及び 行列型の厳密解の導出**
- **高次元可積分系の非等スペクトル線形問題の統一的な定式化 と その幾何学**

を研究課題と設定し，研究に取り組んだ. 前者の研究についての報告は別の機会にして，本稿では後者の研究について報告する[2].

これまでに断続的に考察されてきた非等スペクトル線形問題 [2]-[8] の一般的な定式化を，天下り的にではあるが，与える. そして，AKNS 階層を例にとり，その有効性を具体的な計算過程と結果を通して紹介したい.

(記号) 簡単のため, 本稿中の演算子記号として，

$$f_x(x) \equiv \partial_x f(x) \equiv \frac{\partial f}{\partial x}(x),$$

$$\partial_x^{-1} f(x) \equiv \int_{\infty}^{x} f(s)ds,$$

$$[\mathcal{A},\ \mathcal{B}] \equiv \mathcal{AB} - \mathcal{BA}$$

と約束しておく. このとき，明らかに

$$\partial_x \partial_x^{-1} f(x) = \partial_x^{-1} \partial_x f(x) = 1,$$

*Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, Av. Trabalhador São Carlense, 400 - Caixa Postal 369 - 13560-970 São Carlos - SP, Brasil

[1] 英語力に自信がないので確かなことはいえないが，こんなところだと思う.

[2] 但し，紙数の制限により結果の全てを本稿にて報告することはできない. 雰囲気が伝われば幸いである. 詳しく知りたい場合には，例えば，参考文献 [1] を参照されたい.

$$[\mathcal{A},\ \mathcal{A}] = 0$$

である．

2. 非等スペクトル線形問題の統一的な定式化

本稿では，3次元時空上の（形式的）波動関数 $\psi = \psi(t,x,z)$ に対して，

$$\begin{cases} \psi_x = \mathcal{M}\psi, \\ \left(\partial_t - \xi^j \partial_z\right)\psi = \mathcal{N}\psi, \qquad j \in \mathbb{Z} \end{cases} \tag{1}$$

と与えられる線形問題について考察する[3]．ここで，$\mathcal{M}$ および $\mathcal{N}$ は適当な演算子[4] であり，ξ は **スペクトル変数**とする．そして可積分条件：

$$\left(\partial_t - \xi^j \partial_z\right)\left(\partial_x \psi\right) = \partial_x \left\{\left(\partial_t - \xi^j \partial_z\right)\psi\right\} \tag{2}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\left[\partial_x,\ \partial_t - \xi^j \partial_z\right] = 0 \tag{3}$$

より，線形問題 (1) は可換条件：

$$\left[\partial_x - \mathcal{M},\ \partial_t - \xi^j \partial_z - \mathcal{N}\right] = 0 \tag{4}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\mathcal{M}_t - \mathcal{N}_x + [\mathcal{M},\ \mathcal{N}] - \xi^j \mathcal{M}_z = 0 \tag{5}$$

と等価となる．これまでの多くの研究では，スペクトル変数 ξ は

$$\xi_t = 0$$

を満たすべきものであった[5]．しかし，線形問題 (1) の場合には，一般的に，$\xi = \xi(t,z)$ が許されて，非線形偏微分方程式：

$$\xi_t = \mathcal{F}(\xi, \xi_z) \tag{6}$$

を満たすことに注意したい[6]．この非線形偏微分方程式 (6) は **非等スペクトル（*non-isospectral*）条件**と呼ばれる．そこで，それに合わせて，線形問題 (1) を**非等スペクトル線形問題**と，可換条件 (5) を**非等スペクトル Lax 方程式**と呼ぶことにする．

ここで，次元還元について少しコメントしておきたい．$\psi_z = \psi_x$ という次元逓減（還元）の下で，非等スペクトル（*non-isospectral*）線形問題 (1) は

$$\begin{cases} \psi_x = \mathcal{M}\psi, \\ \psi_t = \left(\xi^j \mathcal{M} + \mathcal{N}\right)\psi, \qquad j \in \mathbb{Z} \end{cases} \tag{7}$$

となり，$\psi_z = \psi_t$ という次元逓減（還元）の下で，

$$\begin{cases} \psi_x = \mathcal{M}\psi, \\ \left(1 - \xi^j\right)\psi_t = \mathcal{N}\psi, \qquad j \in \mathbb{Z} \end{cases} \tag{8}$$

とそれぞれ次元逓減（還元）される．これらはともに等スペクトル（*isospectral*）線形問題であり，前者は Korteweg-de Vries(KdV) 階層を，後者は Ablowitz-Kaup-Newell-Segur 型浅水波階層を与える．

これまでが，非等スペクトル線形問題の統一的な定式化の話である．これから $j \in \mathbb{N}$ の場合の Ablowitz-Kaup-Newell-Segur(AKNS) 階層を例にとり，詳しく非等スペクトル（*non-isospectral*）線形問題 (1) について考察する．

3. 具体例： 非等スペクトル高次元 Ablowitz-Kaup-Newell-Segur 階層

AKNS 階層とは，2成分波動関数ベクトル $\psi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}$ に対する演算子 $\mathcal{M}$ および $\mathcal{N}$ が，2次行列 [9]-[12]：

$$\begin{cases} \mathcal{M} = \xi \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & q \\ r & 0 \end{pmatrix}, \\ \mathcal{N} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \end{cases} \tag{9}$$

で与えられる． ここで $i^2 = -1$，$q = q(t,x,z)$，$r = r(t,x,z)$，$A = A(\xi; q, r, q_x, r_x, \ldots.)$，$B = B(\xi; q, r, q_x, r_x, \ldots.)$，$C = C(\xi; q, r, q_x, r_x, \ldots.)$，$D =$

---

[3] この線形問題の二つ目の左辺に注目してもらいたい．ベクトル場 ∂_z と スペクトル変数 ξ が積の形で現れている．これは KdV 階層などの通常の可積分なソリトン階層とは決定的に異なるところである．この形こそがこの線形問題から出てくる可積分階層が，（反）自己双対 Yang-Mills 階層と Bogomolny 階層の中間に位置するのである．

[4] 微分演算子でも行列でもよいが，本稿では行列の場合を考える．

[5] これを**等スペクトル条件**，その線形問題を**等スペクトル線形問題**と呼ぶ．

[6] 行列 $\mathcal{M}$ の成分が ξ を含めば，可換条件 (5) の $\xi^j \mathcal{M}_z$ から具体的な形が出てくる．

$D(\xi; q, r, q_x, r_x, ...)$ とする[7]．

このとき，$\mathcal{M}$ と $\mathcal{N}$ の交換子積が

$$
\begin{aligned}
[\mathcal{M}, \mathcal{N}] &= \xi\left[\begin{pmatrix}-i & 0\\ 0 & i\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}\right] \\
&\qquad + \left[\begin{pmatrix}0 & q\\ r & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}\right] \\
&= \xi\begin{pmatrix}0 & -2iB\\ 2iC & 0\end{pmatrix} \\
&\qquad + \begin{pmatrix}qC - Br & qD - Aq\\ rA - Dr & rB - Cq\end{pmatrix} \qquad (10)
\end{aligned}
$$

であるので，非等スペクトル（*non-isospectral*) Lax 方程式 (5) から，以下の連立方程式：

$$
\begin{aligned}
&A_x - qC + Br + i\left(\xi_t - \xi^j \xi_z\right) = 0, &(11)\\
&q_t - B_x - \xi^j q_z - 2i\xi B + qD - Aq = 0, &(12)\\
&r_t - C_x - \xi^j r_z + 2i\xi C + rA - Dr = 0, &(13)\\
&D_x + Cq - rB - i\left(\xi_t - \xi^j \xi_z\right) = 0 &(14)
\end{aligned}
$$

をえる．今は $A \sim D$ をスカラーとしているので，連立方程式 (11) と (14) を両辺足すと，

$$\partial_x (A + D) = 0 \iff A + D = \alpha(t, z, \xi) \qquad (15)$$

となる．当面は一部の例外を除いて，簡単のために，積分により生じる**積分関数**[8] は零にとる．すると，連立方程式 (11) - (14) は

$$
\begin{aligned}
&A_x - qC + Br - i\left(\xi_t - \xi^j \xi_z\right) = 0, &(16)\\
&q_t - B_x - \xi^j q_z - 2i\xi B - 2qA = 0, &(17)\\
&r_t - C_x - \xi^j r_z + 2i\xi C + 2rA = 0 &(18)
\end{aligned}
$$

となる．そして，$A \sim C$ に対して，次のような ξ の冪展開：

$$A = \sum_{k=j_a}^{j_A} A_k \xi^k, \qquad (19)$$

$$B = \sum_{k=j_b}^{j_B} B_k \xi^k, \qquad (20)$$

$$C = \sum_{k=j_c}^{j_C} C_k \xi^k \qquad (21)$$

を考えることにより，非等スペクトル高次元 AKNS 階層がえられる．但し，$A_j = A_j(q, r, q_x, r_x, ...)$，$B_j = B_j(q, r, q_x, r_x, ...)$ および $C_j = C_j(q, r, q_x, r_x, ...)$ である．

[7] ここで $A \sim D$ はスカラーとする．行列ともできるが，それは別の機会に．

[8] ここでは，$\alpha(t, z, \xi)$ のことである．積分定数にちなんだ勝手な造語である．**被積分関数**のことではない．

冪展開 (19) - (21) を連立方程式 (16) - (18) に代入すると，各々

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=j_a}^{j_A} (A_k)_x \xi^k - \sum_{k=j_c}^{j_C} qC_k \xi^k + \sum_{k=j_b}^{j_B} B_k r \xi^k \\
&\quad = i\left(\xi_t - \xi^j \xi_z\right), \qquad (22)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
q_t &= \sum_{k=j_b}^{j_B} (B_k)_x \xi^k + \xi^j q_z + 2i \sum_{k=j_b}^{j_B} B_k \xi^{k+1} \\
&\quad + 2\sum_{k=j_a}^{j_A} qA_k \xi^k \\
&= \sum_{k=j_b}^{j_B} (B_k)_x \xi^k + \xi^j q_z + 2i \sum_{k=j_b+1}^{j_B+1} B_{k-1} \xi^k \\
&\quad + 2\sum_{k=j_a}^{j_A} qA_k \xi^k, \qquad (23)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
r_t &= \sum_{k=j_c}^{j_C} (C_k)_x \xi^k + \xi^j r_z - 2i \sum_{k=j_c}^{j_C} C_k \xi^{k+1} \\
&\quad - 2\sum_{k=j_a}^{j_A} rA_k \xi^k \\
&= \sum_{k=j_c}^{j_C} (C_k)_x \xi^k + \xi^j r_z - 2i \sum_{k=j_c+1}^{j_C+1} C_{k-1} \xi^k \\
&\quad - 2\sum_{k=j_a}^{j_A} rA_k \xi^k \qquad (24)
\end{aligned}
$$

となる．方程式 (16) に注目すると，その左辺からは ξ の冪しかでてこないので，右辺にある項はそれ自身が零とならなければならない．つまり，スペクトラル変数 ξ は次の非線形偏微分方程式：

$$\xi_t - \xi^j \xi_z = 0 \qquad (25)$$

を満たさなければならない．これが，AKNS 階層に対する**非等スペクトル条件**と呼ばれるものである．そし

て，このとき A, B, C に対する連立方程式:

$$\sum_{k=j_a}^{j_A}(A_k)_x\xi^k-\sum_{k=j_c}^{j_C}qC_k\xi^k+\sum_{k=j_b}^{j_B}B_kr\xi^k=0, \tag{26}$$

$$q_t=\sum_{k=j_b}^{j_B}(B_k)_x\xi^k+\xi^jq_z+2i\sum_{k=j_b+1}^{j_B+1}B_{k-1}\xi^k+2\sum_{k=j_a}^{j_A}qA_k\xi^k, \tag{27}$$

$$r_t=\sum_{k=j_c}^{j_C}(C_k)_x\xi^k+\xi^jr_z-2i\sum_{k=j_c+1}^{j_C+1}C_{k-1}\xi^k-2\sum_{k=j_a}^{j_A}rA_k\xi^k \tag{28}$$

が**非等スペクトル AKNS 階層**を与える.

それでは，$j\in\mathbb{N}$ の場合について考察を進める.

まず，$j>0$ に対する各冪展開の上端 j_A, j_B, j_C 及び 下端 j_a, j_b, j_c を求める. 方程式 (27) より

$$j_A=j_B+1=j,\quad j_a=j_b=0, \tag{29}$$

方程式 (28) より

$$j_A=j_C+1=j,\quad j_a=j_c=0, \tag{30}$$

なので，まとめると

$$j_A=j,\quad j_B=j_C=j-1,\quad j_a=j_b=j_c=0 \tag{31}$$

である. これを連立方程式 (22) - (24) に代入し整理すると，最終的に

$$(A_j)_x\xi^j+\sum_{k=0}^{j-1}\{(A_k)_x-qC_k+B_kr\}\xi^k=0, \tag{32}$$

$$\begin{aligned}q_t-2qA_0-(B_0)_x&=(q_z+2iB_{j-1}+2qA_j)\xi^j\\&+\sum_{k=1}^{j-1}\{(B_k)_x+2iB_{k-1}+2qA_k\}\xi^k,\end{aligned} \tag{33}$$

$$\begin{aligned}r_t+2rA_0-(C_0)_x&=(r_z-2iC_{j-1}-2rA_j)\xi^j\\&+\sum_{k=1}^{j-1}\{(C_k)_x-2iC_{k-1}-2rA_k\}\xi^k\end{aligned} \tag{34}$$

となる. よって，ξ の冪毎に，$1\le k\le j-1$ かつ $0\le k'\le j-1$ （$j,k,k'\in\mathbb{N}$）として，

$$A_j=\beta_j(t,z), \tag{35}$$

$$B_{j-1}=iq\beta_j(t,z)+\frac{i}{2}q_z, \tag{36}$$

$$C_{j-1}=ir\beta_j(t,z)-\frac{i}{2}r_z, \tag{37}$$

$$A_{k'}=\partial_x^{-1}(qC_{k'}-B_{k'}r), \tag{38}$$

$$B_{k-1}=iqA_k+\frac{i}{2}(B_k)_x, \tag{39}$$

$$C_{k-1}=irA_k-\frac{i}{2}(C_k)_x \tag{40}$$

なる漸化式[9]と，スカラー場 q 及び r が満たす連立非線形偏微分方程式：

$$\begin{cases}q_t-2qA_0-(B_0)_x=0,\\ r_t+2rA_0-(C_0)_x=0\end{cases} \tag{41}$$

をえる.

与えられた $j\in\mathbb{N}$ に対して，帰納的に A_k，B_k，C_k が求まり，そして最終的に，スカラー場 q 及び r が満たす連立非線形偏微分方程式が求まる. そのことを，$j=2$ (or $2n$) の場合と $j=1$ (or $2n-1$) の場合について具体的にみていく. 前者が非等スペクトル高次元 KdV 方程式（or 階層）を，後者が非等スペクトル高次元 nonlinear Schrödinger(NLS) 方程式（or 階層）を与えることが分かる.

- **$j=2$ の場合**

$$A_2=\beta_2, \tag{42}$$

$$B_1=iq\beta_2+\frac{i}{2}q_z, \tag{43}$$

$$C_1=ir\beta_2-\frac{i}{2}r_z, \tag{44}$$

$$A_1=-\frac{i}{2}\partial_x^{-1}(qr)_z, \tag{45}$$

$$B_0=\frac{q}{2}\partial_x^{-1}(qr)_z-\frac{\beta_2}{2}q_x-\frac{q_{xz}}{4}, \tag{46}$$

$$C_0=\frac{r}{2}\partial_x^{-1}(qr)_z+\frac{\beta_2}{2}r_x-\frac{r_{xz}}{4}, \tag{47}$$

$$A_0=\beta_2rq+\frac{1}{4}\partial_x^{-1}(rq_{xz}-qr_{xz}) \tag{48}$$

[9] 普通の漸化式は，$0\to j$ のように，下から上にあがっていくが，今回は上から下にさがっていく.

であり，連立方程式は

$$\begin{aligned} & q_t+\frac{q_{xxz}}{4}-\frac{1}{2}\left\{q\partial_x^{-1}(qr)_z\right\}_x \\ & -\frac{q}{2}\partial_x^{-1}(rq_{xz}-qr_{xz}) \\ & +\beta_2\left(\frac{q_{xx}}{2}-2rq^2\right)=0, \end{aligned} \tag{49}$$

及び

$$\begin{aligned} & r_t+\frac{r_{xxz}}{4}-\frac{1}{2}\left\{r\partial_x^{-1}(qr)_z\right\}_x \\ & +\frac{r}{2}\partial_x^{-1}(rq_{xz}-qr_{xz}) \\ & +\beta_2\left(2r^2q-\frac{r_{xx}}{2}\right)=0 \end{aligned} \tag{50}$$

となる．もう少し具体的に方程式を見てみよう．

– $\beta_2=0$ 及び $r=-1$ のとき，Calogero-Bogoyavlenskii-Schiff 方程式 [2],[3],[13]-[18]：

$$q_t+\frac{1}{4}q_{xxz}+qq_z+\frac{1}{2}q_x\partial_x^{-1}q_z=0 \tag{51}$$

をえる．このとき，(非等スペクトル) Lax 対は

$$\mathcal{M} = \xi\begin{pmatrix}-i & 0\\ 0 & i\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & q\\ -1 & 0\end{pmatrix} \tag{52}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{N} = {} & \xi\begin{pmatrix}i\partial_x^{-1}q_z/2 & iq_z/2\\ 0 & -i\partial_x^{-1}q_z/2\end{pmatrix} \\ & +\begin{pmatrix}-q_z/4 & -q_{xz}/4-q\partial_x^{-1}q_z/2\\ \partial_x^{-1}q_z/2 & q_z/4\end{pmatrix}\end{aligned} \tag{53}$$

である．

– $\beta_2=0$ 及び $r=-q$ のとき[10]，modified Calogero-Bogoyavlenskii-Schiff 方程式 [3],[16]：

$$\begin{aligned} & q_t+q^2q_z+\frac{1}{2}q_x\partial_x^{-1}(q^2)_z \\ & +\frac{1}{4}q_{xxz}=0. \end{aligned} \tag{54}$$

をえる．このとき，(非等スペクトル) Lax 対は

$$\mathcal{M} = \xi\begin{pmatrix}-i & 0\\ 0 & i\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & q\\ -q & 0\end{pmatrix}, \tag{55}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{N} = {} & \xi\begin{pmatrix}i\partial_x^{-1}(q^2)_y/2 & iq_y/2\\ iq_y/2 & -i\partial_x^{-1}(q^2)_y/2\end{pmatrix} \\ & +\begin{pmatrix}0 & f\\ -f & 0\end{pmatrix}\end{aligned} \tag{56}$$

である．ここで，$f=-\frac{1}{4}q_{xy}-\frac{1}{2}q\partial_x^{-1}(q^2)_y$ とする．このとき，(非等スペクトル) Lax 対は

$$\mathcal{M} = \xi\begin{pmatrix}-i & 0\\ 0 & i\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & q\\ r & 0\end{pmatrix}, \tag{57}$$

$$\mathcal{N} = i\begin{pmatrix}-\partial_x^{-1}(qr)_z & q_z\\ -r_z & \partial_x^{-1}(qr)_z\end{pmatrix} \tag{58}$$

である．

- **$j=1$ の場合**

この場合も $j=2$ の場合と同様にして，高次元可積分方程式 [19], [20]：

$$\begin{cases} iq_t+q_{xz}-2q\partial_x^{-1}(qr)_z=0, \\ ir_t-r_{xz}+2r\partial_x^{-1}(rq)_z=0 \end{cases} \tag{59}$$

をえる．これは 2 成分高次元 NLS 方程式と呼ばれる．$r=\pm q^*$ とすれば，高次元 NLS 方程式 [3],[21],[22]：

$$q_t-iq_{xz}\pm 2iq\partial_x^{-1}(|q|^2)_z=0 \tag{60}$$

となる．

[10] $r=-1$ と $r=-q$ を結ぶゲージ変換（Miura 変換）がある．

4. まとめ

本稿では，これまでに断続的に考察されてきた非等スペクトル線形問題の一般的な定式化を与えた．そして，AKNS 階層を例にとり，その有効性を具体的な計算過程と結果を通して紹介した．

本稿では触れていないが既に得られている結果としては，

- 典型的な導出法による（形式的な）保存量の導出 [23, 24, 25]
- 非等スペクトル線形問題の Lie 代数的表現の優位性の検証
- Drinfeld-Sokolov 階層[11] の非等スペクトル線形問題

がある．

現在行っている課題としては，

- $j \in -\mathbb{N}$ の場合
- 2 次行列で表現される，（AKNS 階層以外の）可積分階層の非等スペクトル線形問題
- ゲージ場の高次元可積分系である自己双対 Yang-Mills 階層の非等スペクトル線形問題
- 非等スペクトル線形問題の 擬微分演算子による表現
- 非等スペクトル線形問題と関連する，拘束系，無分散可積分系 や 行列型可積分系の導出

がある．

まだ手つかずの問題としては，

- 3 次行列で表現される可積分階層の非等スペクトル線形問題 [26, 27]
- 非等スペクトル線形問題に対する 逆散乱法による解析学的解法 の実現性の検証
- 非等スペクトル線形問題を考えることで 初めて得られる新しい知見 の発見

がある．

[11] AKNS 階層とある種のゲージ変換でつながることが知られている．

謝辞

本稿を書くにあたり有益な情報 や 参考文献を教えて下さった紺野 公明氏（日本大学・理工）及び 土田 隆之氏（岡山光量子科学研究所）に感謝します．

著者の一人（KT）は，普段の有益な議論に対して，中村 厚氏（北里大学・理），小林 匡氏（ROHM LSI）及び 高崎 金久氏（京都大学・人環）の各氏に感謝します．

著者の一人（KT）は，2007 年 2 月から 3 月まで京都大学・基礎物理学研究所にアトム型研究員（短期滞在プログラム）として滞在中に本研究を開始しました．滞在の機会を与えていただきました佐々木 隆氏（京都大学）に深く感謝します．

日本学術振興会 及び ブラジル科学アカデミーの招聘により，著者の一人（KT）はサンパウロ大学サンカルロス校に滞在することができました．この機会にもう一人の著者（LAF）と共同研究を本格的に開始し，本稿中の結果の多くをえることができました．著者は日本学術振興会 及び ブラジル科学アカデミーに深く感謝します．

最後になりましたが，著者の家族の協力により実りの多い共同研究ができました．深く感謝します．

補足： 可積分性について

「可積分（性）」とは有限自由度の Hamilton 力学系に対する概念であった．すなわち, Liouville-Arnold の定理:

> 自由度 N の Hamiltonian 系に N 個の保存量があり, それが Poisson 括弧に関して互いに可換ならば, 初期値問題は有限回の求積[12] によって解ける

が成り立つ系, すなわち**初期値問題が求積操作の有限回の繰り返しで解ける**のが**可積分系**である．それではソリトン方程式に代表される非線形な無限自由度の連続系に関してはどうだろうか？ 実はかなり怪しくなる. 非線形な無限自由度の連続系において, 一般には（少なくとも可積分系の研究者の間では）以下の性質（証拠）;

1. **線形化可能**:
適当な変数変換により線形化できる．
2. **逆散乱法で解ける時** [28]:
「『適当な境界条件の下で初期値問題を解くこと』が『線形の積分方程式を解くこと』に帰着できる」というのが, 逆散乱法のポイントである．
3. **Lax 対の存在** [29]:
ほとんどの場合, 逆散乱法の手順にのる.
4. **Liouville-Arnold の意味での「可積分性」**:
適当な Poisson 構造の下で無限個の互いに可換な保存量が存在する.（または対称性が存在する.）
5. **（反）自己双対 Yang-Mills 方程式からの導出** [30]:
4 次元の（反）自己双対 Yang-Mills 方程式に対して,「適当に」ゲージ群を固定し, 場の量や空間次元に「適当な」制約を加えることで, 可積分な方程式を導出できることが知られている．そして, おそらく全ての可積分方程式が導出できるであろうと信じられている（**Ward 予想**）.
6. **bi-Hamilton 構造** [31]:
異なる Poisson 構造をもつ二通りの Hamilton 系として定式化できる．これから Liouville-Arnold の意味での「可積分性」に従うことが言える.
7. **厳密解の存在** [32]:
広田の直接法などにより（N-ソリトン解のような）広いクラスの厳密解の表式を具体的に求めることができる.
8. **Bäcklund 変換の存在** [32]:
これがあれば大体簡単な解から逐次的にソリトン解（やそれに類する解）が構成できる.
9. **Painlevé 性** [33],[34]:
常微分方程式の級数解のもつ「初期値に伴って動く特異点は高々極のみ」という性質のことである.

のどれかが成り立てば「可積分」と考えられている.

参考文献

[1] 戸田 晃一 (2008): 京都大学数理解析研究所「非線形波動現象の数理と応用 研究集会報告集」(研究代表者： 矢野 猛氏）に掲載予定原稿.

[2] F. Calogero (1975): A method to generate solvable nonlinear evolution equations, *Lett. Nuovo Cim.*, **Vol. 14**, pp.443-447.

[3] O. I. Bogoyavlenskii (1990): Breaking solitons in 2+1-dimensional integrable equations, *Russian Math. Surveys*, **Vol. 45**, pp.1-86.

[4] P. A. Clarkson, P. R. Gordoa and A. Pickering (1997): Multicomponent equations associated to non-isospectral scattering problems, *Inv. Prob.*, **Vol. 13**, pp.1463-1476.

[5] P. R. Gordoa and A. Pickering (1999): Nonisospectral scattering problems: A key to integrable hierarchies, *J. Math. Phys.*, **Vol. 40**, pp.5749-5786.

[6] 戸田 晃一 (2003): 人生いろいろ，可積分系もいろいろ, 富山県立大学紀要, **第 15 巻**, pp.10-19.

[7] T. Kobayashi and K. Toda (2006): The Painlevé analysis and reducibility to the canonical forms for nonautonomous soliton equations in higher-dimensions and their exact solutions, *Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications*, **Vol. 2**, paper 063.

[8] T. Kobayashi and K. Toda (2007): Extensions of nonautonomous soliton equations to higher dimensions, *Preprint*, 78ページ.

[9] M. J. Ablowitz, D. J. Kaup, A. C. Newell and H. Segur (1974): The inverse scattering transform-Fourier analysis for nonlinear problems, *Studies Appl. Math.*, **Vol. 53**, pp.249-315.

[10] A. Das (1989): Integrable Models, World Scientific Pub.

[11] 和達 三樹 (1992): 非線形波動 (岩波講座現代の物理学 14), 岩波書店.

[12] 戸田 盛和 (2000): 非線形波動とソリトン, 日本評論社.

[13] F. Calogero and A. Degasperis (1982): Spectral Transform and Solitons, Elsevier Science.

[14] O. I. Bogoyavlenskii (1990): Overturning solitons in new two-dimensional integrable equations, *Math. USSR-Izv.*, **Vol. 34**, pp245-259.

[15] J. Schiff (1992): Integrability of Chern-Simons-Higgs vortex equations and a reduction of the selfdual Yang-Mills equations to three-dimensions, NATO ASI Ser. B, **Vol. 278**, New-York, Plenum.

[16] S-J. Yu, K. Toda, N. Sasa and T. Fukuyama (1998): N soliton solutions to the Bogoyavlenskii-Schiff equation and a quest for the soliton solution in $(3+1)$ dimensions, *J. Phys. A*, **Vol. 31**, pp.3337-3343.

[17] K. Toda, Yu, S and T. Fukuyama (1999): The Bogoyavlenskii-Schiff Hierarchy and Integrable Equations in $(2+1)$ Dimensions, *Rep. Math. Phys.* **Vol. 44**, pp.247-254.

[18] T. Ikeda and K. Takasaki (2001): Toroidal Lie algebras and Bogoyavlensky's 2+1-dimensional equation, *Int. Math. Research Notices*, **Vol. 7**, pp.329–369.

[19] I. A. B. Strachan (1992): A new family of integrable models in (2+1) dimensions associated with Hermitian symmetric spaces, *J. Math. Phys.*, **Vol. 33**, pp.2477-2482.

[20] I. A. B. Strachan (1993): Some integrable hierarchies in (2+1) dimensions and their twistor description, *J. Math. Phys.*, **Vol. 34**, pp.243-259.

[21] Z. Jiang and R. K. Bullough (1994): Integrability and a new breed of solitons of an NLS type equation in $(2+1)$ dimensions, *Phys. Lett. A*, **Vol. 190**, pp.249-254.

[22] S. Kakei, T. Ikeda and K. Takasaki (2002): Hierarchy of $(2+1)$ dimensional Nonlinear Schrödinger Equation, Self-Dual Yang-Mills Equation, and Toroidal Lie Algebras, *Annales Henri Poincare*, **Vol. 3**, pp.817-845.

[23] K. Konno, H. Sanuki and Y. H. Ichikawa (1974): Conservation Laws of Nonlinear-Evolution Equations, *Prog. Theor. Phys.*, **Vol. 52**, pp. 886-889.

[24] M.Wadati, H. Sanuki and K. Konno (1975): Relationships among Inverse Method, BacklundTransformation and an infinite Number of Conservation Laws, *Prog. Theor. Phys.*, **Vol. 53**, pp. 419-436.

[25] K. Konno and M.Wadati (1975): Simple Derivation of Backlund Transformation from Riccati Form of Inverse Method, *Prog. Theor. Phys.*, **Vol. 53**, pp. 1652-1656.

[26] N. Yajima and M. Oikawa (1975): A Class of Exactly Solvable Nonlinear Evolution Equations, *Prog. Theor. Phys.*, **Vol. 54**, pp. 1576-1577.

[27] MJ Ablowitz and R Haberman (1975): Nonlinear Evolution Equations–Two and Three Dimensions, *Phys. Rev. Lett.*, **Vol. 35**, pp1185-1188.

[28] C. S. Gardner, J..M. Greene, M. D. Kruskal and R. M. Miura (1967): Method for solving the Korteweg-de Vries equation, *Phys. Rev. Lett.*, **19**, pp.1095-1097.

[29] P. D. Lax (1968): Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves, *Comm. Pure. Appl. Math.*, **21**, pp.467-490.

[30] （反）自己双対 Yang-Mills 方程式と可積分系との関係は, その深層に Twistor 幾何学がある:

- R.S. Ward (1985): Integrable And Solvable Systems, And Relations Among Them, *Phil. Trans. Roy. Soc. Lond. A*, **315**, pp.451-457.
- L.J. Mason and N.M. Woodhouse (1996): *Integrability, Self-Duality, and Twistor Theory* (London Mathematical Society monographs, new series: 15), Oxford UP.
- L. Mason and Y. Nutku (2003): *Integrability, Self-Duality, and Twistor Theory* (London Mathematical Society Lecture Note Series 295), 153pages, Cambridge UP.

[31] M. Blaszak (1998): 「*Multi-Hamiltonian Theory of Dynamical Systems*」, 350pages, Springer-Verlag.

[32] 広田 良吾 (1992):「直接法によるソリトンの数理」, 岩波書店.

[33] Painlevé 性 及び Painlevé 方程式に関する文献はたくさんあるが, 筆者がいつも参考にするもののみ挙げることにする:

- 岡本 和夫 (1985):「パンルヴェ方程式序説」（上智大学数学講究録 N0. 19）, 上智大学数学教室.
- M. J. Ablowitz and P. A. Clarkson (1991): 「Solitons, Nonlinear Evolution Equations and Inverse Scattering」, 516pages, Cambridge University Press.
- 川原 琢治 (1993):「ソリトンからカオスへ」, 朝倉書店.
- R. Conte（編）(2000): 「*The Painlevé Property* One Century Later」, Springer-Verlag.

[34] 戸田 晃一（2002）: Painlevé 性–可積分判定法という観点から–, 慶應義塾大学 日吉紀要 自然科学, **第 32 巻**, pp.1-37.

A brief review of non-isospectral problems

Kouichi TODA and Luiz Agostinho FERREIRA *

Department of Liberal Arts and Sciences, Faculty of Engineering

Summary

We will briefly review non-isospectral problems, which give *soliton*, or *integrable* hierarchies in higher-dimensions.

Key Words: *integrable hierarchies*, *non-isospectral problems*, *soliton equations*, *gauge theories*

*Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, Av. Trabalhador São Carlense, 400 - Caixa Postal 369 - 13560-970 São Carlos - SP, Brasil.