

ゲートを導入した M/G/1+vacation モデルの解析 — Level-Crossing 法による解析 —

小林 香・片山 勁

(工学部情報システム工学科)

限られた資源を、任意のタイミングでやってくる複数の利用者が利用するシステム — 銀行の ATM やスーパーマーケットのレジなどが誰にでも分かりやすい例である — を考える。利用者がやってきたときに直ちに利用できる (空いている) 資源の数がゼロであれば、当然のことであるが利用できない利用者が出てくる。待ち行列 (バッファ) があり、資源に空きが出るまで利用者が待つことが可能であれば、このシステム全体を、資源が利用できるまでの平均待ち時間で定量的に評価することができる。

バッファが空になると、休暇 (バケーション) で総称される副次的作業に資源を使う場合、利用者の平均到着間隔が資源 1 つの平均利用時間に近づくに従って、システム内に滞留する利用者数が増え、副次的作業が後回しにされる。必要なタイミングで副次作業を行うことができるように、今回は、本来の待ち行列の前にもう一つ待ち行列を準備し、2 つの待ち行列の間にゲートを設ける。このようなゲートを導入した M/G/1+vacation システムについての諸量を、Level-Crossing 法を用いて解析をする。

キーワード : Level-Crossing 法, M/G/1 vacation モデル, ゲート, 残余仕事量, 待ち時間分布

1 ゲートを導入した M/G/1 +vacation モデル

呼 (パケット) が、処理時間分布 $H(t)$ に従う単一のサーバ (処理装置) でサービスを受けるために、到着間隔分布 $A(t)$ に従う到着間隔でシステムに到着し、サーバが他のパケットにより使用中である時、サービスを受けるまで待つことのできる無限長の待ち行列 (バッファ) が存在するシステム、Kendall の記号を用いて GI/G/1 と表記されるシステムについて、Level-Crossing 法を用いて直接待ち時間分布を得る解析過程を本学紀要第 12 巻 [1] において述べた。また、上記のシステムに、休暇 (バケーション) と総称する副次作業を加えたシステムでの Level-Crossing 法による、解析過程を本学紀要第 14 巻 [2] において述べた。

上記の 2 つのシステムではともに、平均処理時間 $E(H)$ と平均到着間隔 $E(A)$ の間に $E(H) < E(A)$ の関係があれば、システムに定常状態が存在し、解析可能となる。しかし、 $E(H)$ が $E(A)$ に近づくにつれて、システム内に滞留するパケットの数が著しく増加し、また、サービスを受けるまでの平均待ち時間も指数関数的に増加することで、サーバがほぼ常に稼働状態になる。休暇と呼ばれ

る副次的作業が必要なものであっても、サーバがその状態に移行することができないことになる。この状態を回避し、必要なタイミングでサーバが休暇に移行するように、平均到着間隔が短くともバッファを適当な時間間隔で空にする状況を作り出す必要がある。今回は、本来のバッファ Q_1 の前にもう一つのバッファ Q_0 を準備し、2 つのバッファの間にゲートを設け、ゲートの開閉によって Q_1 に送るパケットを制御するシステムを扱う。

パケットは、到着率 λ のポアソン過程に従ってシステムに到着し、まずバッファ Q_0 に格納されるが、ゲートが閉じている状態なのでバッファ Q_1 に進むことができない。サーバが休暇から戻った時点のみゲートが開き、 Q_0 内のすべてのパケットがバッファ Q_1 に移動し、パケットの移動が完了したら直ちにゲートを閉じる。サーバは Q_1 内のパケットを到着順 (FIFO) に処理し、 Q_1 内の全てのパケットの処理を終了すると再び休暇に出発する。以前に解析した単純なシステムであれば、サーバがバッファ内のパケットの処理中に新たにシステムに到着したパケットも同じく処理されるが、今回、ゲートの導入により、サービス中に新たに到着したパケットはゲートより先には進めないで Q_0 内に留まり、サーバが休暇を終えて、ゲートが開くのを待ち合わせることになる。図 1 にゲートを導入

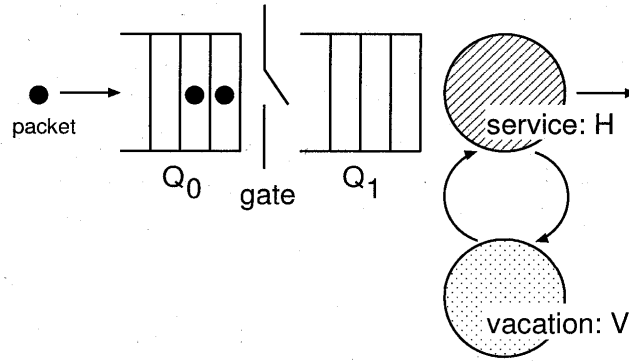


図 1: M/G/1+vacation with gate model

した M/G/1+vacation モデルを示す. 本モデルからゲート (gate) およびその手前のバッファ \$Q_0\$ を取り除くと, 本学紀要第 14 巻 [2] で解析対象とした M/G/1+vacation モデルになる.

今回, 休暇のとり方として, 次の 3 種類の場合を考える.

Multiple Vacation (MV) : サーバが休暇から戻った時点で \$Q_0\$ に待ちパケットがなければ, 再び休暇に出発する. この場合, サーバは待機状態 (アイドル) になることはない.

Single Vacation I (SV_I) : サーバが休暇から戻った時点で \$Q_0\$ に待ちパケットがなければ, そのまま新たなパケットの到着を待つ (すなわち休暇は一度限り). パケットが到着すればゲートを開けてサービスを行う. 休暇から戻った時点で \$Q_0\$ に待ちパケットがあれば, ゲートを開けて処理を行う.

Single Vacation II (SV_{II}) : サーバが休暇から戻った時点で \$Q_0\$ に待ちパケットがあっても, 休暇中に到着したパケットがなければ, 新たなパケットの到着を待つ. パケットが到着すれば上記のゲート処理を行う.

各パケットの処理時間 (\$H\$) と各休暇時間 (\$V\$) は, 互いに独立でそれぞれ一般分布 \$H(t)\$ と \$V(t)\$ に従う. 分布関数 \$H(t)\$ と \$V(t)\$ のラプラス・スティルチェス変換 (LST: Laplace-Stieltjes Transform) をそれぞれ \$H^*(s)\$, \$V^*(s)\$ と表し, それらの \$m\$ 次積率 (\$m = 1, 2, 3\$) をそれぞれ \$h^{(m)}, v^{(m)}\$ と表す. ただし \$h := h^{(1)}, v := v^{(1)}\$ とする. また 次の記号を用いる.

$$\begin{aligned} \rho &\equiv \lambda h, & \rho_v &\equiv \lambda v, \\ Q(x) &\equiv H^*(\lambda - \lambda x), & Q_v(x) &\equiv V^*(\lambda - \lambda x) \end{aligned} \quad (1)$$

以下の解析では, システムの定常状態の存在条件として利用率 \$\rho = \lambda h < 1\$ を仮定する.

2 パケットの待ち時間分布

定常状態でのパケットの待ち時間を解析するために, 以下の仕事量と分布関数およびその LST を定義する.

サーバが処理すべき系内パケットの総処理時間 (the sum of all remaining service times in the system) を \$R_w\$ とする. また, 残余休暇時間 (remaining vacation time) を \$R_v\$ とおく. サーバは, システムに到着するパケットがシステム内に持ち込む仕事量 (\$R_w\$) に加えて, 休暇時間も処理すべき仕事として扱うため, 任意時点でのシステム内残余仕事量 \$W_v\$ は \$W_v \equiv R_w + R_v\$ となる.

システムに到着した 1 つのパケットの待ち時間 (\$W\$) は, そのパケットの到着直前時点の残余仕事量 (\$W_v\$) に等しく, これを実待ち時間 (actual waiting time) と呼ぶ. これに対して, パケットの到着直前時点以外でも連続して得られる \$W_v\$ を仮想待ち時間 (virtual waiting time) と呼び, 区別する. ここで, \$W \leq x\$ および \$W_v \leq x\$ となる確率でそれぞれの分布関数を定義し, そこから LST を定義する. すなわち,

仮想待ち時間の分布関数とその LST :

$$\begin{aligned} W_v(x) &\equiv \Pr\{W_v \leq x\} \\ W_v^*(s) &= \int_0^\infty e^{-st} dW_v(t), \end{aligned}$$

実待ち時間の分布関数とその LST :

$$\begin{aligned} W(x) &\equiv \Pr\{W \leq x\} \\ W^*(s) &= \int_0^\infty e^{-st} dW(t). \end{aligned}$$

3 パケットの待ち時間の確率過程

残余仕事量 \$W_v\$ の確率過程 \$\{W_t\}\$ を考える. その標本関数 (サンプルパス) \$W_t\$ は, 到着率 \$\lambda\$ のポアソン呼 (パケット) の到着ごとに仕事量 \$H\$ だけ上にジャンプする. 同様にサーバが休暇に入るたびに仕事量 \$V\$ だけ上にジャンプするので, この休暇自体を “vacation 呼” とみなし

て、その到着率を λ_v と表す。それ以外の時間領域では、サーバが処理を進めるため、サンプルパスは -1 の勾配をもつ右下りの直線である。図 2 に M/G/1+MV モデル (ゲートなし) のサンプルパスを示す。今回のモデルでは、ゲートが導入されているので、休暇の開始と vacation 呼の到着 (=サービス期間の開始) とは異なることに注意する必要がある。

4 Level-Crossing 法による解析

Level-Crossing 法とは、観測時間 $(0, T)$ の間に、レベル x を W_t のサンプルパスが上から下に横切る頻度 (down-rate) の時間平均 $N_{down}(T)/T$ と、下から上に横切る頻度 (up-rate) の時間平均 $N_{up}(T)/T$ が、十分長い間観測 $(T \rightarrow \infty)$ することで等しくなるという平衡方程式から、待ち時間分布を直接得る手法である。

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{N_{down}(T)}{T} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{N_{up}(T)}{T} \quad (2)$$

手法の詳細は本学紀要第 14 巻 [2] に述べてあるので、参照されたい。

残余仕事量 W_v の確率過程 $\{W_t\}$ を考え、そのサンプルパスにおいて、レベルクロッシング法を適用すれば、次の平衡方程式を得る。

$$\frac{dW_v(x)}{dx} = \lambda_v \int_0^x \bar{V}(x-y)dJ(y) + \lambda \int_0^x \bar{H}(x-y)dW(y), \quad x > 0 \quad (3)$$

ここで、 $\bar{H}(x)$ は、 $H(x)$ の補分布 ($\bar{H}(x) \equiv 1 - H(x)$) であり、同じく $\bar{V}(x)$ は、 $V(x)$ の補分布 ($\bar{V}(x) \equiv 1 - V(x)$) である。また、 $J(x)$ は vacation 呼の到着直前時点の残余仕事量 J の分布関数である。平衡方程式 (3) の左辺は、 W_t のサンプルパスが、レベル x を上から下に横切る頻度 (down-rate) を表し、同じく右辺は下から上に横切る頻度 (up-rate) を表している。右辺の第 1 項は、vacation 呼の到着 (休暇の開始) によって W_t がレベル x を下から上に横切る場合に対応し、第 2 項はパケット (ポアソン呼) の到着によって W_t がレベル x を下から上に横切る場合に対応している。

式 (3) の右辺の vacation 呼の到着率 λ_v と分布関数 $J(x)$ は、現在未知であるが、後にこれらを決定する。

まず式 (3) の両辺をそれぞれラプラス・スティルチェス変換する。

$$W_v^*(s) - W_v(0) = \lambda_v \frac{1 - V^*(s)}{s} J^*(s) + \lambda \frac{1 - H^*(s)}{s} W^*(s) \quad (4)$$

ここで $J^*(s)$ は、分布関数 $J(x)$ の LST で、畳込み演算 (convolution) の LST 公式を用いた。また、 $W_v(0)$ は待

ち時間がゼロ、つまり到着したパケットは待ち合わせを受けることなく直ちに処理が開始される確率である。

パケットはポアソン過程に従って到着することを仮定しているので、ポアソン到着の特性 (PASTA: Poisson arrivals see time-averages) から、

$$W_v^*(s) = W^*(s), \quad W_v(0) = W(0) \quad (5)$$

である。よって、式 (4) は次のように整理される。

$$W^*(s) - W(0) = \lambda_v \frac{1 - V^*(s)}{s} J^*(s) + \lambda \frac{1 - H^*(s)}{s} W^*(s) \quad (6)$$

この平衡方程式は MV, SV モデルの両方で成立し、サーバがどのように休暇に入るかは、 $\lambda_v, J^*(s)$ および $W(0)$ の具体的な表式に反映される。

multiple vacation (MV) モデルにおいては、サーバはサービス中か休暇中のどちらかの状態にあり、到着したパケットに対して待ち時間ゼロでサービスを開始することはない。この処理特性から式 (7) が成り立つ。

$$W(0) = 0 \quad (7)$$

正規化条件 $W^*(0) = 1$ と式 (3) の右辺にロピタルの定理を用いることで、vacation 呼の平均到着率 λ_v を以下のように得る。

$$\lambda_v = (1 - \rho)/v \quad (8)$$

未決定の LST $J^*(s)$ を含んだ形の式 (9) で $W^*(s)$ が表される。

$$W^*(s) = \frac{(1 - \rho)s}{s - \lambda + \lambda H^*(s)} \cdot \frac{1 - V^*(s)}{vs} J^*(s) \quad (9)$$

single vacation (SV_I, SV_{II} とともに) モデルにおいては、少なくともサーバが休暇から戻った時点で Q_0 が空であれば、新たにパケットが到着するまで待機状態となる。サーバが待機状態にあるとき、新たに到着したパケットに関しては、待ち時間ゼロで直ちにサービスを開始することができるので、 $W(0) > 0$ となる。

また、ゲートが開閉した時点から次のゲートが開閉する時点までの時間をサイクルタイム (cycle time) C とすると、single vacation モデルにおいては、この時間の中に vacation 呼が 1 つ含まれる形になる。このことから、

$$\frac{1}{\lambda_v} = E(C) \quad (10)$$

であることが分かる。single vacation モデルでの λ_v および $W(0)$ の表式は付録 B を参照されたい。

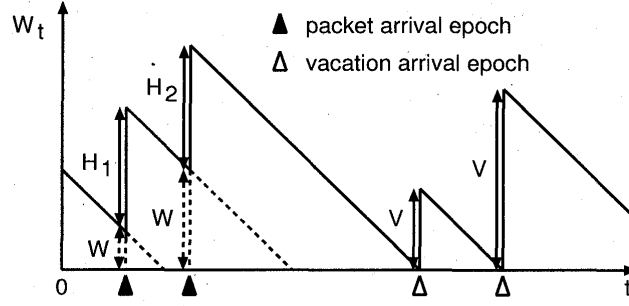


図 2: A sample path of M/G/1+MV model

5 $J^*(s)$ の導出

5.1 MV モデルでの $J^*(s)$ の導出

まず, multiple vacation (MV) モデルにおける $J^*(s)$ の解析を行う。

各時点の packets 数分布の母関数 (PGF: Probability Generating Function) を次のように定義する。

$\Psi(x)$: 休暇終了時点 (\neq サービス開始時点) の Q_0 の待ち packets 数分布 $\{\psi_i; i = 0, 1, 2, \dots\}$ の PGF ($= \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i x^i$)

$\Psi_v(x)$: 休暇開始時点の Q_0 の待ち packets 数分布の PGF

$Q(x)$: 処理時間 (H) に到着する packets の個数分布の PGF ($Q(x) \equiv H^*(\lambda - \lambda x)$)

$Q_v(x)$: 休暇時間 (V) に到着する packets の個数分布の PGF ($Q_v(x) \equiv V^*(\lambda - \lambda x)$)

ゲート式の処理規律より式 (11) が成立し, $\Psi(x)$ と $\Psi_v(x)$ には式 (12) の関係がある。

$$\Psi_v(x) = \Psi[Q(x)] \quad (11)$$

$$\Psi(x) = \Psi_v(x)Q_v(x) \quad (12)$$

よって, 次の $\Psi(x)$ の関数方程式を得る。

$$\Psi(x) = \Psi[Q(x)]Q_v(x) \quad (13)$$

この関数方程式の解を付録 A に示す。後に待ち時間分布の積率公式の導出に必要な微分項 $\Psi'(1)$ や $\Psi''(1)$ は, その解を用いなくとも, この方程式の両辺を x で微分した後 $x = 1$ とおいて, 次式のように求められる。

$$\Psi'(1) = \frac{\rho_v}{1 - \rho} \quad (14)$$

$$\Psi''(1) = \frac{\lambda^2 \rho_v (h^{(2)} + 2hv)}{(1 + \rho)(1 - \rho)^2} + \frac{\lambda^2 v^{(2)}}{1 - \rho^2} \quad (15)$$

さて, ここで vacation 呼の到着直後の残余仕事量の LST を $F^*(s) \equiv J^*(s)V^*(s)$ と表せば, 休暇終了時点において

$$F^*(\lambda - \lambda x) = J^*(\lambda - \lambda x)V^*(\lambda - \lambda x) = \Psi_v(x)Q_v(x) \quad (16)$$

が成立するから, $\Psi_v(x)$ あるいは $\Psi(x)$ の PGF を用いて, $J^*(s)$ が次式により表される。

$$J^*(s) = \Psi_v(1 - s/\lambda) = \Psi[H^*(s)] \quad (17)$$

$J^*(s)$ の補足:

$T = J$ をある休暇の開始時点 (開始時刻), $T = J + V$ をその休暇の終了時刻とし, 時刻 T における Q_0 の待ち packets 数分布の PGF を $G_T(x)$ と表せば次式が得られる。

$$G_J(x) = \Psi_v(x), \quad G_{J+V}(x) = \Psi_v(x)Q_v(x) \quad (18)$$

すなわち, $T = 0$ は休暇に先立つサーバのサービス開始時刻 (前の休暇の終了時刻) であり, J はそれに続くサービス期間 (サービス開始から休暇の開始まで) とみなされる。したがって, 式 (16) および次式が成立する。

$$J^*(\lambda - \lambda x) = \Psi_v(x), \quad J^*(s) = \Psi[H^*(s)] \quad (19)$$

ここで, $J^*(s) \neq \Psi_v[H^*(s)]$ に注意する。等号が成立しないのは, 休暇の開始と vacation 呼の到着 (サービス期間の開始) が同一時刻ではなく, vacation 呼の到着時点の残余仕事量 ($J^*(s)$) と休暇の開始時点の仕事量 ($\Psi_v[H^*(s)]$) が等しくないからである。

5.2 SV モデルでの $J^*(s)$ の導出

次に single vacation (SV) モデルでの解析を行う。

まず packets 数分布の母関数 PGF を新たに定義する。

$\Psi(x)$: 休暇期間終了時点 (= サービス開始時点) の Q_0 の待ち packets 数分布 $\{\psi_i; i = 1, 2, 3, \dots\}$ の PGF ($= \sum_{i=1}^{\infty} \psi_i x^i$)

$\Psi_v(x)$, $Q(x)$, $Q_v(x)$ は multile vacation (MV) モデルと同じであるので, $\Psi_v(x)$ は式 (11) で, また, $Q(x) = H^*(\lambda - \lambda x)$, $Q_v(x) = V^*(\lambda - \lambda x)$ で与えられる.

サーバが休暇時間中に 1 つもパケットの到着がない確率を q_0 とし,

$$q_0 \equiv V^*(\lambda) \tag{20}$$

で, さらに, 休暇開始時点でのバッファ Q_0 内でサーバを待っているパケット数が 0 である確率 p_0 を

$$p_0 \equiv \Psi_v(0) \tag{21}$$

と定義する. この 2 つの量 (q_0 , p_0) を定義するのは, サーバがゲートを開閉してから次にゲートを開閉するまでの一周期 (サイクルタイム) が, SV_I モデルと SV_{II} モデルとでは異なるからである. つまり, SV_I モデルでは, 休暇終了時点で Q_0 が空の場合 (休暇開始時点でシステムが空であり, かつ休暇中に 1 つもパケットが到着しない), サーバが待機状態になるのに対して, SV_{II} モデルでは, 休暇時間中に 1 つもパケットの到着がなければサーバが待機状態に移行するので p_0 を考慮する必要がなくなるのである.

それぞれの single vacation モデルにおいて次の関係式が成り立つ.

(i) SV_I

$$\Psi(x) = \{\Psi_v(x) - p_0\}Q_v(x) + p_0\{Q_v(x) - q_0(1-x)\} \tag{22}$$

(ii) SV_{II}

$$\Psi(x) = \Psi_v(x)\{Q_v(x) - q_0(1-x)\} \tag{23}$$

よって, 次の $\Psi(x)$ の関数方程式を得る.

(i) SV_I

$$\Psi(x) = \Psi[Q(x)]Q_v(x) - p_0q_0(1-x) \tag{24}$$

(ii) SV_{II}

$$\Psi(x) = \Psi[Q(x)]\{Q_v(x) - q_0(1-x)\} \tag{25}$$

この関数方程式の解を付録 A に示す. これより $J^*(s)$ が次式で表される.

$$J^*(s) = \Psi_v(1 - s/\lambda) = \Psi[H^*(s)] \tag{26}$$

6 待ち時間分布の解析

ベースとなる M/G/1 システムでの待ち時間分布の LST $W^*(s)_{M/G/1}$ を以下のように定義する.

$$W^*(s)_{M/G/1} \equiv \frac{(1-\rho)s}{s-\lambda+\lambda H^*(s)} \tag{27}$$

また, MV, SV_I , SV_{II} とともに, 次のように $z_k(x)$ を定義する.

$$\begin{aligned} z_0(x) &\equiv x, \quad 0 \leq x \leq 1, \\ z_k(x) &\equiv Q[z_{k-1}(x)], \quad k = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \tag{28}$$

さらに, 残余休暇時間の LST $R_V^*(s)$ を次のように定義しておく.

$$R_V^*(s) \equiv \frac{1 - V^*(s)}{vs} \tag{29}$$

ここから, 残余休暇時間の m 次積率を次のように得る.

$$E(R_V^m) \equiv \frac{v^{(m+1)}}{(m+1)v} \tag{30}$$

特に, 一次積率 $E(R_V)$ を $E(R_V)$ とする表記を用いる.

Theorem 1 (MV)

multiple vacation (MV) モデルの待ち時間分布の LST を次のように表わす.

$$W^*(s) = W^*(s)_{M/G/1} R_V^*(s) J^*(s) \tag{31}$$

$$J^*(s) \equiv \Psi_v(1 - s/\lambda) = \Psi[H^*(s)]$$

$$\Psi(x) \equiv \prod_{k=0}^{\infty} Q_v[z_k(x)]$$

Theorem 2 (SV)

single vacation (SV_I および SV_{II}) モデルの待ち時間分布の LST を次のように表わす.

$W(0)$ の具体的な表記は, 付録 B を参照されたい.

$$W^*(s) = W^*(s)_{M/G/1} \cdot [\pi_i + (1 - \pi_i) R_V^*(s) J^*(s)] \tag{32}$$

$$\pi_i \equiv \frac{W(0)}{1 - \rho}$$

$$J^*(s) \equiv \Psi_v(1 - s/\lambda) = \Psi[H^*(s)]$$

SV_I の場合, 休暇終了時点でのバッファ Q_0 での待ちパケット数分布 $\Psi(x)$ は次のように与えられる.

$$\begin{aligned} \Psi(x) &\equiv \prod_{k=0}^{\infty} Q_v[z_k(x)] - p_0q_0(1-x) \\ &\quad - p_0q_0 \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ (1 - z_k(x)) \prod_{j=0}^{k-1} Q_v[z_j(x)] \right\} \end{aligned} \tag{33}$$

SV_{II} の場合, 休暇終了時点でのバッファ Q_0 での待ちパケット数分布 $\Psi(x)$ は次のように与えられる.

$$\Psi(x) \equiv \prod_{k=0}^{\infty} \{Q_v[z_k(x)] - q_0(1 - z_k(x))\} \tag{34}$$

このようにして, ゲート付きの各モデルにおける待ち時間分布の LST $W^*(s)$ を表式化できれば, そこから待

ち時間の平均 (一次積率) と二次積率が次のように求められる。

$$E(W) = (-1) \left. \frac{dW^*(s)}{ds} \right|_{s=0} \quad (35)$$

$$E(W^2) = (-1)^2 \left. \frac{d^2W^*(s)}{ds^2} \right|_{s=0} \quad (36)$$

次に、待ち時間の積率公式を示す。

Corollary 1 (MV)

ゲート付き multi vacation (MV) モデルにおける、待ち時間の 1 次積率 $E(W)$ および 2 次積率 $E(W^2)$ を次のように得る。

$$E(W) = \frac{\lambda h^{(2)}}{2(1-\rho)} + \frac{v^{(2)}}{2v} + \frac{\rho v h}{1-\rho} \quad (37)$$

$$\begin{aligned} E(W^2) &= E(W^2)_{M/G/1} + E(R_V^2) + E(J^2) \\ &+ 2 \cdot \left\{ \begin{array}{l} E(W)_{M/G/1} E(R_V) \\ + E(W)_{M/G/1} E(J) \\ + E(R_V) E(J) \end{array} \right\} \\ &= \frac{\lambda h^{(3)}}{3(1-\rho)} + \frac{[\lambda h^{(2)}]^2}{2(1-\rho)^2} + \frac{\lambda h^{(2)} v^{(2)}}{2(1-\rho)^2} + \frac{v^{(3)}}{3v} \\ &+ \frac{(1+\rho+\rho^2)\rho v h^{(2)}}{(1-\rho)(1-\rho^2)} + \frac{\rho(1+2\rho)v^{(2)}}{1-\rho^2} \quad (38) \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{l} E(W)_{M/G/1} \equiv \frac{\lambda h^{(2)}}{2(1-\rho)} \\ E(W^2)_{M/G/1} \equiv \frac{\lambda h^{(3)}}{3(1-\rho)} + \frac{[\lambda h^{(2)}]^2}{2(1-\rho)^2} \\ E(J) \equiv \Psi'(1)h \\ E(J^2) \equiv \Psi''(1)\rho h + \Psi'(1)\lambda h^{(2)} \end{array} \right) \quad (39)$$

ここでの $\Psi'(1)$, $\Psi''(1)$ は MV モデルでの式 (14), (15) を参照されたい。

Corollary 2 (SV_I)

ゲート付き single vacation (SV_I) モデルにおける、待ち時間の 1 次積率 $E(W)$ および 2 次積率 $E(W^2)$ を次のように得る。

$$E(W) = \frac{\lambda h^{(2)}}{2(1-\rho)} + \frac{\lambda v^{(2)}}{2(\rho v + p_0 q_0)} + \frac{\rho v h}{1-\rho} \quad (40)$$

$$\begin{aligned} E(W^2) &= E(W^2)_{M/G/1} \\ &+ (1-\pi_0)E(R_V^2) + E(J^2) \\ &+ 2(1-\pi_0) \cdot \left\{ \begin{array}{l} E(W)_{M/G/1} E(R_V) \\ + E(W)_{M/G/1} E(J) \\ + E(R_V) E(J) \end{array} \right\} \quad (41) \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{l} p_0 q_0 \equiv \frac{\prod_{k=0}^{\infty} Q_v[z_k(0)]}{1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ (1-z_k(0)) \prod_{j=0}^{k-1} Q_v[z_j(0)] \right\}} \\ \pi_0 = \frac{p_0 q_0}{\rho v + p_0 q_0} \\ E(J) \equiv \Psi'(1)h \\ E(J^2) \equiv \Psi''(1)\rho h + \Psi'(1)\lambda h^{(2)} \\ \Psi'(1) \equiv \frac{\rho v + p_0 q_0}{1-\rho} \\ \Psi''(1) \equiv \frac{(2\rho\rho v + \lambda^2 h^{(2)})\Psi'(1) + \lambda^2 v^{(2)}}{1-\rho^2} \end{array} \right) \quad (42)$$

Corollary 3 (SV_{II})

ゲート付き single vacation (SV_{II}) モデルにおける、待ち時間の 1 次積率 $E(W)$ および 2 次積率 $E(W^2)$ を次のように得る。

$$E(W) = \frac{\lambda h^{(2)}}{2(1-\rho)} + \frac{\lambda v^{(2)}}{2(\rho v + q_0)} + \frac{\rho v h}{1-\rho} \quad (43)$$

$$\begin{aligned} E(W^2) &= E(W^2)_{M/G/1} \\ &+ (1-\pi_0)E(R_V^2) + E(J^2) \\ &+ 2(1-\pi_0) \cdot \left\{ \begin{array}{l} E(W)_{M/G/1} E(R_V) \\ + E(W)_{M/G/1} E(J) \\ + E(R_V) E(J) \end{array} \right\} \quad (44) \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{l} \pi_0 = \frac{q_0}{\rho v + q_0} \\ E(J) \equiv \Psi'(1)h \\ E(J^2) \equiv \Psi''(1)\rho h + \Psi'(1)\lambda h^{(2)} \\ \Psi'(1) \equiv \frac{\rho v + q_0}{1-\rho} \\ \Psi''(1) \equiv \frac{\{2\rho(\rho v + q_0) + \lambda^2 h^{(2)}\}\Psi'(1) + \lambda^2 v^{(2)}}{1-\rho^2} \end{array} \right) \quad (45)$$

7 まとめ

待ち行列システムの標準的な解析方法として、パケットの処理終了直後におけるシステム内パケット数に着目する隠れマルコフ連鎖法や、システム内パケット数の他に残余処理時間などを状態変数として取り入れる補助変数法などが挙げられ、さらに、さまざまな休暇のとり方を統合した一般的な形式による解析がなされている [3],[4]。これに対して、Level-Crossing 法による解析は、システム内残余仕事量に関する平衡方程式を解くことで、定常

状態における待ち時間分布の LST $W^*(s)$ を数学的に容易に得ることができ、待ち時間の一次および二次積率を求めることで、ストリーミング・サービスにおいて重要な通信品質である待ち時間の揺らぎを定量的に評価することが可能となる利点がある。

本学紀要第 14 巻 [2] で報告した、ゲートのない M/G/1+vacation (MV) および (SV) モデルでは、休暇の開始時点と vacation 呼の到着時点が一致している。例えば、ゲートのない M/G/1+vacation (MV) モデルでは、待ち時間分布の LST $W^*(s)$ は以下のようになった。

$$W^*(s) = W^*(s)_{M/G/1} \cdot R_V^*(s) \quad (46)$$

右辺の前半部分は基本となる M/G/1 モデルでの寄与であり、システム内パケット数がゼロである限り繰り返して取る休暇の寄与は右辺の後半部分で見積もることができる。今回、同システムにゲートを導入したことで、式 (31) に示すように vacation 呼の到着直前時点での残余仕事量の分布関数の LST $J^*(s)$ が掛けられた状態で $W^*(s)$ が算出された。これには、導入したゲートが閉じていることによってサーバ直前の Q_1 に一度に入ることのできるパケット数に制限がかかり、到着したパケットが Q_0 でゲートが次に開くのを待つ時間の効果が折り込まれている。そのため、休暇開始時点から次の休暇開始時点までの時間が短くなり、意図したように副次的作業に対応する休暇の優先の程度を上げることができることになる。実際に、式 (46) と式 (31) で、適切なパラメータを代入して計算を行うと、パケットの到着率が高くなるに伴い、ゲート付きの場合の平均待ち時間がゲート無しの場合の平均待ち時間よりもはるかに大きくなることが確認された。

これまで述べたように、ゲート処理を導入した M/G/1+vacation モデルに対して、Level-Crossing 法を用いることで、パケットの数のような呼数ベースでなく、時間ベースで諸量を計算することが容易になることが確認できた。待ち行列システムを解析する場合、まず第一に得たいのは対象とするシステムでの平均待ち時間であるから、Level-Crossing 法はそのための最短路であることはほぼ間違いない。具体的な表式を得る際には、平衡方程式である式 (4) に現れる仮待ち時間分布と実待ち時間分布が等しくなること (式 (5)) を使用しているので、パケットの到着がポアソン過程に従うことを条件としているが、待ち行列システム上の様々な処理規律を「仮想呼の到着イベント」として扱うことができることから、その適用範囲はかなり広がるものと考えられる。

参考文献

[1] 小林 香, 片山 勁 (2002): “Level Crossing 法による GI/G/1 待ち行列モデルの解析”, 富山県立大学紀

要, 第 12 巻, 47-53.

[2] 小林 香, 片山 勁 (2004): “Level Crossing 法による GI/G/1 バケーション待ち行列モデルの解析”, 富山県立大学紀要, 第 14 巻, 77-86.

[3] R. J. Boucherie, “Advanced Queueing Theory (LNMB)”, Lecture note,
<http://wwwhome.math.utwente.nl/~boucherierj/onderwijs/Advanced%20Queueing%20Theory/AQTsheetshc8.pdf>.

[4] B. D. Choi, et al., “An M/G/1 queue with multiple types of feedback, gated vacations and FCFS policy”, *Computers & Operations Research*, Volume 30, Issue 8, August 2003, pp 1289–1309.

[5] B. T. Doshi (1992): “Level-Crossing analysis of queues”, *Queueing and Related Models*, edited by U. Narayan Bhat and I. V. Basawa, 3-33.

A $\Psi(x)$ の決定

次の級数 $\{z_k\}$ を定義する。

$$\begin{aligned} z_0(x) &:= x, \quad 0 \leq x \leq 1 \\ z_k(x) &:= Q[z_{k-1}(x)] \quad k = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (47)$$

これを式 (13) の $\Psi(x) = \Psi_v(x)Q_v(x)$ に代入すれば

$$\frac{\Psi(z_k(x))}{\Psi_v(z_{k+1}(x))} = Q_v(z_k(x)) \quad (48)$$

となり、順次 $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ として、両辺の積を取れば

$$\Psi(z_0(x)) = \Psi(z_n(x)) \prod_{k=0}^{n-1} Q_v[z_k(x)]. \quad (49)$$

よって

$$\Psi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \Psi(z_n(x)) \prod_{k=0}^{n-1} Q_v[z_k(x)]. \quad (50)$$

ここで $\rho \leq 1, 0 \leq x \leq 1$ のとき $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n(x) = 1$ が、 x に無関係に示されるので、正規化条件 $\Psi(1) = 1$ より右辺の未知定数の値が $\Psi(z_\infty(x)) = 1$ と求まる。よって次式を得る。

$$\Psi(x) \equiv \prod_{k=0}^{\infty} Q_v[z_k(x)] \quad (51)$$

同様にして single vacation model に対して次の結果を得る. (i) SV_I の場合

$$\Psi(x) = \prod_{k=0}^{\infty} Q_v[z_k(x)] - p_0 q_0 (1-x) - p_0 q_0 \sum_{k=1}^{\infty} \{(1-z_k(x)) \prod_{j=0}^{k-1} Q_v[z_k(x)]\} \quad (52)$$

(ii) SV_{II} の場合

$$\Psi(x) = \prod_{k=0}^{\infty} \{Q_v[z_k(x)] - q_0(1-z_k(x))\} \quad (53)$$

(i) SV_I の場合

$$E(C) = \frac{\Psi'(1)h + v + p_0 q_0 / \lambda}{1 - \rho} \quad (55)$$

$$W(0) = \frac{p_0 q_0 / \lambda}{E(C)} = (1 - \rho) \frac{p_0 q_0 / \lambda}{v + p_0 q_0 / \lambda} \quad (56)$$

(ii) SV_{II} の場合

$$E(C) = \frac{\Psi'(1)h + v + q_0 / \lambda}{1 - \rho} \quad (57)$$

$$W(0) = \frac{q_0 / \lambda}{E(C)} = (1 - \rho) \frac{q_0 / \lambda}{v + q_0 / \lambda} \quad (58)$$

B Cycle Time

サイクルタイム (cycle time) C は, サーバがゲート処理を開始してから次のゲート処理を開始するまでの時間 (一周期) で, 下記の諸量の基本である. single vacation モデルでは, 1 サイクルタイムの間に一度サーバが休暇に出発することから, 以下の関係がある.

$$\lambda_v = \frac{1}{E(C)} \quad (54)$$

An Analysis of M/G/1 Queueing Model with Gated Vacations by the Level-Crossing Method

Kaori KOBAYASHI and Tsuyoshi KATAYAMA

Department of Information Systems Engineering, Faculty of Engineering

Summary

A situation is frequently happened in our daily life that a user commonly shares some limited resources with other users or waits until he can use these resources; e.g. at an automated teller machine (ATM) in a bank. As one of these queueing systems, a M/G/1 queueing model (denoted by Kendall's notation; "M" specifies the arrival process is a renewal arrival process, "G" specifies the service time distribution is a general distribution, and "1" denotes a single server) is a basic queueing system with non-exhaustive service, and has a fundamental and an important role in evaluation of quality of service (QoS) of queueing systems. To analyze a queueing system, the method of the imbedded Markov chain is commonly used for finding a distribution function of the number of users in the system, though an obtained generating function of the number of users is expressed in mathematical form and is not easily understandable.

In this paper, a M/G/1 queueing system with gated vacations is considered. In this queueing system, as soon as all of the users within the gate have been served, the server goes on a vacation, and users outside of the gate have to wait for the next server's service. Taking the level-crossing method, we have obtained the probability density function of waiting time in the M/G/1 queueing model with vacations and gated service discipline, more intuitively than using the generating function of the distribution of the number of users, and discuss this method's validity.

key words: level-crossing method, M/G/1 queueing model, virtual waiting time, distribution function of the waiting time, gated vacations