通信トラヒック理論における多次元マルコフモデルの解析法

片　山　　勁

（工学部　電子情報工学科）

1．はじめに

本論文は、通信トラヒック理論や通信システムの性能評価における“状態数無限の多次元マルコフモデル”の解析法について考察したものである。マルコフモデルは、対象システムに依存しない一般的な確率モデルであるが、より具体的に通信システムにおける複数の待ち行列により構成される待ち行列システムを対象にしている。そして、多次元マルコフモデルの解析法として有名な母関数法（*generating function method*）や境界値問題に定式化する解析法（*boundary value technique*）に焦点を絞り、それらを概観し、研究課題、未解決問題等を明らかにしている。システム内の待ち呼数など無限の離散的状態をとる多次元マルコフモデルは、具体的には次のような複数待ち行列システムに関連するモデルである。

(1)　多重待ち行列（ポーリングモデル）

(2)　並列形待ち行列

(3)　タンデム形待ち行列

(4)　網型待ち行列

(5)　優先権のある待ち行列

(6)　移動扱者モデル（バケーションモデルを含む）

ここで、状態数無限とは、各々の待ち行列モデルにおいて待ち室の容量に制限がないことに対応する。

上記の“複数待ち行列システム”の解析法として、単一待ち行列に分解する分解法（*decomposition method*）などの実用的な優れた近似手法が幾つか提案されているが、本論文では厳密解法のみを対象にしている。

本章に続く章構成とその概要は、以下の通りである。まず、2章で問題を簡単にするために多次元マルコフモデルのうち三次元の待ち行列モデルを例として“最短待ち行列長問題（*shortest queue problem*）”など通信トラヒック理論の分野で良く知られた未解析のマルコフモデルを示し、既存の解析法や今後の研究課題についてまとめる。3章で多次元マルコフモデルの解析の具体例を、最近筆者が遭遇したN次元の待ち行列モデル（準制限式ポーリングモデル）を用いて示し、二次元待ち行列モデルの有力な解析法の一つである“境界値問題に定式化する方法”の概要とその問題点などを明らかにしている。4章、5章では、通信トラヒック理論に現れる各種の境界値問題およびその定式化において基本的な役割を果たすカーネル（核）の構成法について詳述する。6章では本論文全体の内容を要約する。

なお、以下では通信システムの技術分野で用いられる術語の代りに、通信トラヒック理論および待ち行列理論の術語を用いる。

2．三次元のマルコフモデル

トラヒックモデルの中には、ポアソン到着・指数分布サービスの待ち行列モデル（マルコフモデル）でありながら、待ち行列長の定常分布や平均待ち時間の評価式がまだ求められていないものがある。非現実的な特殊なモデルではなく、応用面からも十分意義のある基本的なモデルであるが、解析上の難点から未解決となっているものである。本章では、その様な問題の一つである“三次元の待ち行列問題”について説明する。

2．1　三次元の待ち行列モデル

待ち行列Q_1，Q_2，Q_3が並列に在る待ち行列系を考えよう。この系の各待ち行列長を、3変数i，j，kで表すとき、以下の(1)～(4)に示す待ち行列モデルはいずれも待ち行列長の同時分布$p_{i,j,k}$が求めらていない未解決モデルである。すなわち$p_{i,j,k}$の母関数G(x，y，z)，

$$G(x,y,z):=\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}p_{i,j,k}\,x^i y^j z^k,\quad |x|,\ |y|,\ |z|\leqq 1 \qquad (2.1)$$

の関数形を具体的に決定することができないものである。

以下の例(1)～(4)において、客の到着間隔、サービス時間はいずれも指数分布に従い、待ち室の容量はすべて無限大とする。

(1)　最短待ち行列長モデル（*shortest queue model*）

到着率λで到着する客が、待ち行列Q_1, Q_2, Q_3のうちで最短のものに並ぶ。各待ち行列の客は、それぞれサービス率μ_1, μ_2, μ_3でサービスされる。[2],[4]

(2) レーン選択モデル（*lane selection model*）

到着率λ_1, λ_2, λ_3の３種の客が待ち行列Q_1, Q_2, Q_3に並ぶ。但し、Q_1に待ち客がいない場合に限り、いずれの客もQ_1に到着する。サービス率は、それぞれμ_1, μ_2, μ_3である[1]。

(3) 巡回サービスモデル（cyclic-service model, polling model）

到着率λ_1, λ_2, λ_3の３種の客が待ち行列Q_1, Q_2, Q_3に並ぶ。１人の扱者が$Q_1 \to Q_2 \to Q_3 \to Q_1 \to$と巡回して各待ち行列の客をサービス率$\mu_1$, μ_2, μ_3でサービスする。但し、Q_i, $i=1, 2, 3$でのサービス規律は次の通りである。

① 制限式…Q_iの先頭の１人の客のサービスを終了してから次の待ち行列Q_{i+1}の客のサービスを開始する（詳しくは、１－制限式と呼ばれる）[2]

② セミ全処理式…Q_iのサービスを開始してから待ち行列長が１だけ短くなるまでQ_iのサービスを続け、短くなった時点にQ_{i+1}の客のサービスに移る。

(4) ランダムポーリングモデル（*non-cyclic service model*）

上記(3)の条件で、扱者の移動が巡回式（*cyclic*）でない場合である。

① Ｐ－選択式…

ⓐ－１人の客のサービスを終了したとき、次に与えられた確率p_iで待ち行列Q_i, $i=1, 2, 3$の客のサービスを開始する。

但し、$\sum_{i=0}^{3} p_i = 1$

ⓑ－１人の客のサービス終了時に各待ち行列長がi, j, kのとき、次に確率p_1で待ち行列Q_1の客のサービスを開始する[6]。

$$p_1 = \frac{i\alpha}{i\alpha + j\beta + k\gamma} \qquad i+j+k>0$$

但し、α, β, γ（>0）は緊急度係数である。また、p_2, p_3も同様に定義される。

② 最大待ち行列長優先式…１人の客のサービスを終了したとき、次に最大待ち行列長の客のサービスを開始する。最大値が等しい場合は等確率（１／３、または１／２）でいずれかを選択する[3]。

上記の(1)～(4)以外にまだ幾つかの例があるが、代表的なものに留める。

2．2　二次元と三次元以上の待ち行列モデル

三次元以上の場合と二次元以下では難易度が全然異なる良く知られた例として、有名なフェルマーの定理（問題）がある。

“$n \geq 3$ のとき、$X^n + Y^n = Z^n$を満す整数解（X, Y, Z）は存在しない”

というもので、良く知られているようにまだ完全には証明されていない（岩波数学辞典）。

実は、上記の４種の待ち行列モデルも二次元の場合はここ数年の間に境界値問題として定式化し解析されているが（但し、(4)のＰ－選択式のⓑを除く）、三次元以上の場合はいずれも未解決となっているものである。

上記の待ち行列モデル(1)に対する二次元の待ち行列問題を初めて境界値問題として定式化したのはG. Fayolle らによる文献〔４〕で、約12年前のことである。この方法は、その後成書〔２〕や文献〔３〕に一般化され整理されている。これは、ある意味ではM／G／I，GI／M／Sモデル(注)などの解析に用いられる“隠れマルコフ連鎖法”や“補助変数法”の発見に匹敵するものと思われる。

注：ケンドール（*Kendall*）の記号[5]で、以下この略記号を用いる。

どのような二次元の待ち行列モデルが、境界値問題として定式化されるかは一概に言えないが、最終的には、待ち行列長の同時分布の母関数$G(x, y)$が次の形に帰着される場合である。

$$K(x, y) \cdot G(x, y) = a(x, y)\,G(x, 0) + b(x, y)\,G(0, y) + c(x, y)\,G(0, 0) + d(x, y) \qquad (2.2)$$

すなわち、カーネル（*kernel*）と呼ばれる$K(x, y)$と$a(x, y)$, $b(x, y)$, $c(x, y)$, $d(x, y)$がすべて既知関数で、未知関数$G(x, y)$についての関数方程式（*functional equation*）を解く問題に帰着される場合である。

母関数$G(x, y)$が式（2．2）以外の形に表されて既に解決されている二次元の待ち行列モデル（マルコフモデル）がある。これらにどんな特徴があるかを概観することも先に示した未解決モデルの構造を知る上に必要である。まず、良く知られた三つの例を挙げよう。

(1) ２クラスの優先処理モデル

M_1, M_2／M_1, M_2／１（割込み型、非割込み型）[5]

(2) ２段タンデム型待ち行列モデル

$M(\lambda_1)$／$M(\mu_1)$／$1 \to M(\mu_2)$／１

(Q_2とーQ_1間に帰還(*feedback*)がある*Queueing Network Model*において同時分布$p_{i,j}$が積形式で表される。)

(3) 巡回サービスモデル

待ち行列数が2で、その他は前節の(3)の条件と同じである。但し、サービス規律は次の通りである。

① 全処理式…扱者は待ち行列Q_i, $i=1, 2$の客が居なくなるまでサービスを続けQ_{i+1}に移動する。

② ゲート式…扱者が到着した時点に待ち行列Q_iに居る客のみをすべてサービスする。

ここで注意すべきは、これら(1)~(3)の既に解析されている二次元の待ち行列モデル(マルコフモデル)は、容易に三次元以上の場合(任意の$N<\infty$に対して)も解決できることである。この点が2.1節に示した各モデルと根本的に異なる。多次元マルコフモデルでありながら待ち行列長の同時分布(その母関数$G(x_1, x_2, \cdots, x_N)$, $N\geq 2$)が求められる待ち行列モデルの例(1)~(3)を例示したが、それらを含めて、通信トラヒック理論における母関数の解析法(決定法)は以下の4手法にまとめられる。

① 正規化条件$G(1, 1)=1$のみを用いて母関数を決定する。

　不定形の極限計算に*L'Hospital*の定理が有効である。

② 単位円内の零点を用いて母関数を決定する。

　零点に関する*Rouche*の定理、*L.Takács*の定理が有効である。

③ 線型の関数方程式に帰着させ、その解を用いて母関数を決定する。

　*Kuczma*型の関数方程式 $G\{f(x)\}+g(x)\cdot G(x)=h(x)$ が有効である。

④ 境界他問題に帰着させ、その解を用いて母関数を決定する。

　リーマン形、リーマン・ヒルベルト形の境界値問題が用いられる。

注：二次元の待ち行列モデルの中には、母関数$G(x, y)$が式(2.2)の形にならず、また上記①~④の解析法も適用できないで、文献〔7〕に示すようなまだ未解析のモデルがある。

2.3 研究課題

最も基本的な待ち行列モデル(マルコフモデル)としてM/M/1モデルが挙げられよう。これを出発点として、客の到着過程やサービス時間分布などをより一般化した様々な非マルコフ型待ち行列モデルに対して、非マルコフ性を如何に克服するかを目標に待ち行列理論が発展してきた大きな流れがある[5]。

他方、M/M/1モデル(マルコフモデル)に対して、待ち行列数を増加すること、すなわちマルコフモデルの次元数をより一般化する流れがある。この様な研究は、本章で説明した様に或る領域ではまだ二次元マルコフモデルが主な研究対象で、最近ようやく三次元マルコフモデルが問題にされ始めたところだと言える。

多次元マルコフモデルの解析法に関する主な研究課題をまとめる。

① 前記の三次元の待ち行列問題を解くこと。すなわち、下記の式(2.3)の母関数$G(x, y, z)$の関数方程式を解くこと。

$$\begin{aligned}K(x, y, z)\cdot G(x, y, z)=\;&a_1(x,y,z)\cdot G(x,y,0)+a_2(x,y,z)\cdot G(x,0,z)+a_3(x,y,z)\cdot G(0,y,z)+\\&b_1(x,y,z)\cdot G(x,0,0)+b_2(x,y,z)\cdot G(0,y,0)+b_3(x,y,z)\cdot G(0,0,z)+\\&c(x,y,z)\cdot G(0,0,0)+d(x,y,z)\end{aligned} \tag{2.3}$$

さし当って、カーネル$K(x, y, z)$を零とするx, y, zの組、すなわち、*zerotriple*(x, y, z)を構成する必要がある。

② 2.1節に示した待ち行列モデル以外の新たな二次元待ち行列モデルに境界値問題を適用すること。

③ 従来の手法以外の方法で多次元待ち行列モデルを解くこと。すなわち、2.2節に示した①~④以外の手法(数値解法を含む)を発見すること。

④ 或いは、平均、分散特性のみを別手法で求めることなど(出来れば、平均、分散などの評価式がポラチェック・ヒンチンの公式の様に簡潔な“閉じた形”で与えられること)。

3. 準制限式ポーリングシステムの解析

準制限式ポーリングモデルとは、文献〔8〕で扱われているサービスクラス数がNのM/G/1形のポーリングモデルで、扱者が待ち行列Q_n, $n=1, 2, \cdots, N$の先頭の呼1個を処理してから次の窓口S_{n+1}に移動し、Q_nに待ち呼がない場合にも呼1個の処理時間分だけS_nに留まるサービス規律に従うモデルである。ここでは、多次元マルコフモデルの解析例として、準制限式ポーリングシステムを対象に、境界値問題に定式化する解析法(2.2節の手法④)を概説する。但し、文献〔8〕と同一の記号を使用する。

3．1　母関数の関係式

扱者が窓口 S_n，n＝1，2，…，Nに到着した時点の Q_1，Q_2，…，Q_N の待ち行列長の同時分布を $p_n(i_1, i_2, \dots, i_N)$ と表し、その母関数を $G_n(x_1, x_2, \dots, x_N)$ とする。窓口 S_n での処理時間と S_n，S_{n+1} 間の扱者の移動時間の間（その合計時間）に Q_1，Q_2，…，Q_N に、それぞれ j_1，j_2，…，j_N 個の呼が到着する確率を $r_n(j_1, j_2, \dots, j_N)$ と表し、その母関数を $R_n(x_1, x_2, \dots, x_N)$ とすると次の母関数の関係式が成立つ。

$$G_n(x_1, x_2, \dots, x_N)=\{G_n(x_1, x_2, \dots, x_N)-G_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}=0, \dots, x_N)\}\cdot R_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_N)\cdot 1/x_{n-1}+G_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}=0, \dots, x_N)\cdot R_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_N) \quad (3.1)$$

$$n=1,\ 2,\ \dots,\ N$$

これは、$G_n(x_1, x_2, \dots, x_N)$ n＝1，2，…，Nの連立関数方程式で、待ち行列数が3以上の場合はまだ解かれていない。しかし、文献〔8〕にも示すように周辺分布の母関数 $G_n(1, \dots, 1, x_n=x, 1, \dots, 1)$ は、容易に決定されることは注目すべきである。

待ち行列数が2の場合には2章の式（2．2）と同形の次の関係式（3．2）が導かれ、母関数 $G_n(x_1, x_2)$，n＝1，2が次節で述べるように境界値問題に帰着して決定される。

$$K(x_1, x_2)\cdot G_1(x_1, x_2)=a(x_1, x_2)G_1(x_1, 0)+b(x_1, x_2)G_1(0, x_2)+c(x_1, x_2)G_1(0, 0) \quad (3.2)$$

但し、

$$K(x_1, x_2)=x_1x_2-R_1(x_1, x_2)R_2(x_1, x_2),$$
$$a(x_1, x_2)=(x_2-1)R_1(x_1, 0)R_2(x_1, x_2),$$
$$b(x_1, x_2)=(x_1-1)R_1(x_1, 0)R_2(x_1, x_2),$$
$$c(x_1, x_2)=(x_1-1)(x_2-1)R_1(x_1-0)\cdot R_2(x_1, x_2)$$

3．2　境界値問題の定式化

式（3．2）の未知母関数を決定する問題は、次の3ステップにより定式化される。

ステップ1（閉曲線の決定）：

$K(x_1, x_2)$ が、零となるような $|x_1|, |x_2|\leq 1$ なる x_1 と x_2 の対（x_1，x_2）は、零対（*zerotuple, zero-pairs*）と呼ばれる。零対は幾通りも選び得るが、5．2節にも示すように $K(x_1, x_2)$ が、ポアソン核であるからそれに沿った議論が進められる。まず、以下の記号を定義する。

$$\beta\{\lambda_1(1-x_1)+\lambda_2(1-x_2)\}:=R_1(x_1, x_2)\cdot R_2(x_1, x_2)$$
$$\lambda:=\lambda_1+\lambda_2 \quad (3.3)$$
$$r_1:=\lambda_1/\lambda \qquad r_2:=\lambda_2/\lambda$$

但し、$r_1\geq r_2$ とする。

ここで、次の関係にあるパラメーター（複素数）wを導入する。

$$(x_1=w/2r_1,\ x_2=\bar{w}/2r_2) \quad (3.4)$$

但し、$\bar{w}$ はwの共役複素数である。これを $K(x_1, x_2)=0$ に代入すれば

$$w\cdot\bar{w}=4r_1r_2\beta\{\lambda(1-\mathrm{Re}(w))\} \quad (3.5)$$

を得る。これは、w平面上に閉曲線Fを定める。Fは、単位円内に含まれ、実軸に対称な卵形の閉曲線であることが示される。

ステップ2（閉曲線上の関係式）：

F上の任意の点w∈Fに対して式（3．4）から定まる零対（x_1，x_2）は、式（3．2）の右辺の零対でもあるから（母関数 $G_n(x_1, x_2)$，n＝1，2の正則性により）

$$a(w/2r_1, \bar{w}/2r_2)G_1(w/2r_1, 0)+b(w/2r_1, \bar{w}/2r_2)G_1(0, \bar{w}/2r_2)+c(w/2r_1, \bar{w}/2r_2)G_1(0, 0)=0 \quad (3.6)$$

が導かれる。よって

$$G_1(w/2r_1, 0)=F_1(w)\cdot G_1(0, \bar{w}/2r_2)+F_2(w) \qquad w\in F \quad (3.7)$$

但し、$F_1(w)$，$F_2(w)$ は、式（3．6）から定まる既知関数である。

ステップ3（境界値問題の定式化）：

閉曲線Fの内部 F^+ を、z平面上の単位円Cの内部 C^+ に等角写像する関数

$$z=f(w):F^+\to C^+$$

とその逆写像

$$w=f_0(z):C^+\to F^+$$

は、テオドルセン（*Theodorsen*）の積分方程式から定められる（例えば、文献〔2〕参照）。

これを用いれば、式（3．7）は次のように書き直される。

$$G_1(f_0(z)/2r_1, 0)=F_1(f_0(z))\cdot G_1(0, f_0(1/z)/2r_2)+F_2(f_0(z)) \qquad z\in C \quad (3.8)$$

ここで、

$$G_1^{\#}(z):=G_1(f_0(z)/2r_1, 0)$$
$$z\in C^+\ \mathrm{U}C$$
$$G_2^{\#}(z):=G_1(0, f_0(1/z)/2r_2)$$

$z \in C \cup C^-$ (Cの外部) (3．9)

$H_n(z) := F_n(f_0(z))$, $n=1, 2$

$z \in C$

を導入すれば、式(3．8)は、

$G_1^{\#}(z) = H_1(z) G_2^{\#}(z) + H_2(z)$

$z \in C$ (3．10)

と表される。これは、4．3節に示すリーマンの境界値問題で、この解を用いて式(3．9)より未知関数 $G_n(x_1, x_2)$, $n=1, 2$ が決定される。但し、ここでは上記の定式化のみに留める。この解析法の発見は、2．1節に示したような従来未解決であった2次元のマルコフモデルを解析したことで大変意義深いが、これまでの検討からも分かるように

(1) 等角写像 $f(w)$、$f_0(z)$ を求める必要がある

(2) 解析結果(平均値、分散)の表現式がかなり複雑である

などの問題点がある。

4．境界値問題

境界値問題(*Boundary Value Problem : BVP*)は、前章でも見たように一つの閉曲線(面) Lの上で、或る与えられた関数関係を満たし、その閉曲線(面)の内部(L^+)、あるいは外部(L^-)で正則な関数$\Psi(z)$、$\Phi(z)$を見つける問題である。通信トラヒック理論に現れる境界値問題には、大別すると

(1) リーマン・ヒルベルトの境界値問題

(2) リーマンの境界値問題

の二つのタイプがある。前章で示したように、或るクラスの二次元の待ち行列モデルは、境界値問題に定式化して解析される。種々の待ち行列問題が、どのようにしてこれらの境界値問題に定式化されるかについては個別の文献に譲り、ここでは通信トラヒック理論に現れる幾つかの境界値問題を概説する。

4．1 リーマン・ヒルベルトの境界値問題

(1) $\Psi(z)$ は、$z \in L^+$で正則(*regular*)であり、$z \in L \cup L^+$で連続(*continuous*)である。

(2) $\mathrm{Re}[\{a(t) - i\,b(t)\} \cdot \Psi^+(t)] = c(t)$ $t \in L$

但し、$\Psi^+(t) := \lim_{z \to t \in L} \Psi(z)$ $z \in L^+$

但し、$c(t) = 0$ ならば *homogeneous BVP* と呼ばれる。

$c(t) \neq 0$ ならば *non-homogeneous BVP* と呼ばれる。

これは下記(*Hilbert problem*)と等価である。

(1) $\Psi(z) := u(z) + i\,v(z)$ は、正則(*regular*) $z \in L^+$、連続(*continuous*) $z \in L \cup L^+$ である。

(2) $\Psi^+(t) = u(t) + i\,v(t)$ $t \in L$に対して

$a(t)u(t) + b(t)v(t) = c(t)$ $t \in L$

4．2 ディリクレイの境界値問題

(1) $u(x, y)$ は、C^+ で調和(*harmonic*)で、すなわち、

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) u(x, y) = 0$$

且つ、連続(*continuous*) $z \in C \cup C^+$,

$z = x + i\,y$である。

(2) $\lim_{\substack{z \to t \in C \\ z \in C^+}} u(z) = c(t)$ $t \in C$

ここに、$c(t)$ はC上で連続な実関数(*real continuous function*)である。

但し、Cは、単位円を表す。

これは、4．1節で $a(t)=1$, $b(t)=0$ とおいたのと等価、すなわち

(2)′ $\mathrm{Re}\,\Psi^+(t) = c(t)$ $t \in C$

従って、これを *simple Riemann-Hilbert BVP* とも言う。

一般に、次のように表される。

内部問題：

(1) $\Psi(z)$ は、正則(*regular*) $z \in L^+$、連続(*continuous*) $z \in L \cup L^+$ である。

(2) $\Psi^+(t) = u(t)$ $t \in L$

但し、

$\Psi^+(t) := \lim_{z \to t \in L} \Psi(z)$ $z \in L^+$

外部問題：

(1) $\Psi(z)$ は、正則(*regular*) $z \in L^-$、連続(*continuous*) $z \in L \cup L^-$ である。

(2) $\Psi^-(t) = u(t)$ $t \in L$

但し、

$\Psi^-(t) := \lim_{z \to t \in L} \Psi(z)$ $z \in L^-$

(3) $\Psi(z) \to$ 定数A $|z| \to \infty$

4．3 リーマンの境界値問題

(1) $\Psi(z)$ は、正則(*regular*) $z \in L^+$、連続(*continuous*) $z \in L \cup L^+$ である。

(2) $\Phi(z)$ は、正則(*regular*) $z \in L^-$、連続(*continuous*) $z \in L \cup L^-$である。

(3) $\Phi(z) \to$ 定数A $|z| \to \infty$

(4) $\Psi^+(t) = G(t) \cdot \Phi^-(z) + g(t)$ $t \in L$

但し、$\Psi^{+}(t):=\lim_{\substack{z\to t\in L\\ z\in L^{+}}}\Psi(z)$,

$\Phi^{-}(t):=\lim_{\substack{z\to t\in L\\ z\in L^{-}}}\Phi(z)$

ここに、$g(t)=0$　ならば *homogeneous BVP*

$g(t)\neq 0$ ならば *non-homogeneous BVP*

＊　これは、*coupling problem* とも呼ばれる。

＊＊ $g(t)\neq 0$ の場合を *Carleman-Hilbert problem* と呼ぶ文献もある。

4．4　基本境界値問題

(1)　$\Psi(z)$ は、正則（*regular*）$z\in c\setminus L$

c：複素平面

連続（*continuous*）　$z\in L\cup L^{+}$

$z\in L^{-}\cup L$ である。

(2)　$\Psi(z)\to 0$　　$|z|\to\infty$

$\Psi^{+}(t)-\Psi^{-}(t)=g(t)$　　$t\in L$

但し、$\Psi^{+}(t):=\lim_{\substack{z\to t\in L\\ z\in L^{+}}}\Psi(z)$,

$\Psi^{-}(t):=\lim_{\substack{z\to t\in L\\ z\in L^{-}}}\Psi(z)$

この解は、

$$\Psi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{t\in L}\frac{g(t)}{t-z}\,dt-p(z)$$

但し、$p(z)$ は任意の多項式である。

＊これは、4．3節において $G(t)=1$, $A=0$ とおいたのと等価である。

$\Psi(z)=\Psi(z)$　　for　$z\in L\cup L^{+}$

$\Phi(z)$　　for　$z\in L\cup L^{-}$

4．5　ウィナー・ホップの境界値問題

(1)　$\Psi(z)$ は、正則（*regular*）　Re　$z>0$、連続（*continuous*）Re　$z\geqq 0$ である。

(2)　$\Phi(z)$ は、正則（*regular*）　Re　$z<0$、連続（*continuous*）Re　$z\leqq 0$ である。

(3)　$\Phi(z)\to$ 定数A　$|z|\to\infty$

(4)　$\Psi^{+}(t)=G(t)\cdot\Phi^{-}(z)+g(t)$

$t\in$ Re　$z=0$

但し、$\Psi^{+}(t):=\lim_{\substack{z\to t\in L\\ z\in L^{+}}}\Psi(z)$　,

$\Phi^{-}(t):=\lim_{\substack{z\to t\in L\\ z\in L^{-}}}\Phi(z)$

＊これは、4．3節において

$L:=$ arc {Re　$z=0$}

とおいたのと等価である。

＊＊これは、*Wiener-Hopf* 型（*Fredholm* 型）の積分方程式に帰着される。

5．カーネルの零対の解析

3章で見たように、或るクラスの2次元マルコフモデルが境界値問題に定式化して解かれるが、この解析法において最も基本的な役割りを果たすのがカーネルの零対である。以下にその構成法を概説し、問題点、注意点等を要約する。

5．1　酔歩運動モデル

酔歩運動（*random walk*）は、多くの待ち行列モデルを含むより一般的な確率モデルである。2次元の酔歩運動 $\{(x_n, y_n), n=0, 1, 2, \cdots\}\in S:=\{0, 1, 2, \cdots\}\times\{0, 1, 2, \cdots\}$,

$x_{n+1}=[x_n-1]^{+}+a_n$、$y_{n+1}=[y_n-1]^{+}+b_n$, $n=0, 1, 2, \cdots$

但し、$x_0=x\geqq 0$, $y_0=y\geqq 0$, a_n, $b_n\geqq 0$

の母関数 $\Phi(r, p_1, p_2):=\sum_n\sum_{i,j} r^n p_1{}^i p_2{}^j P$ $\{x_n=i, y_n=j \mid x_0, y_0\}$ の関係式におけるカーネルは、次式で与えられる[3]。

$K(r\,;\,p_1, p_2):=p_1p_2-r\Psi(p_1, p_2)$,

$|r|, |p_1|, |p_2|\leqq 1$

但し、$E\{p_1{}^{a_n}p_2{}^{b_n}\}:=\Psi(p_1, p_2)$

＊カーネル（*kernel*）の零対（*zerotuple*）とは、$|p_1|, |p_2|\leqq 1$ で　$K(r\,;\,p_1, p_2)=0$ となる p_1, p_2 の対 (p_1, p_2) である。

(1)　対称モデル

$\Psi(p_1, p_2)=\Psi(p_2, p_1)$ が成り立つ場合、対称（*symmetric*）と言う。

$p_1=g(r, s)\cdot s$、$p_2=g(r, s)\cdot s^{-1}$

for $|s|=1$

とおくとき、$K\{g(r, s)\cdot s, g(r, s)\cdot s^{-1}\}=g^2-r\Psi(gs, gs^{-1})=0$ より定まる

$p_1=p_1(r\,;\,z)=g_1(r, z)\cdot z$　　$|p_1|\leqq 1$

$z=e^{i\theta}\in L:=\{z:|z|=1\}$

$p_2=p_2(r\,;\,z)=g_1(r, z)\cdot z^{-1}$　$|p_2|\leqq 1$

は、$K(p_1, p_2)$ の *zerotuple* (p_1, p_2) である。

$p_1(r\,;\,z)$ は、$L^{+}\to S_1{}^{+}$ なる等角写像（*conformal mapping*）

$p_2(r\,;\,z)$ は、$L^{-}\to S_2{}^{+}$ なる等角写像（*conformal mapping*）である。

但し、$S_1=\{p_1 \mid p_1=g_1(r, s)\cdot s, |s|=1\}$

$S_2=\{p_2 \mid p_2=g_1(r, s)\cdot s^{-1}, |s|=1\}$,

$p_i=0\in S_i{}^{+}$, $i=1, 2$

＊対象な場合には、S_1, S_2 は、合同で、実軸対称の

simple smooth contour である。

注1：$g^2 - r\Psi(gs, gs^{-1}) = 0$　$|s| = 1$ は、単位円内に次の二実根をもつ。

$0 < g_1(r, z=1) \leqq 1$,

$-1 \leqq g_2(r, z=1) < 0$,

$\{g_1(r, z)\cdot z\}_{z=1} = 1$

注2：$g_1(r, s) = g_1(r, \bar{s})$, $s \cdot \bar{s} = 1$ (∵対称性) より、S_1 と S_2 は同形である。

注3：5．2，5．3節のスリットGを利用した議論は、$\Psi(p_1, p_2)$ のみでは不可である。

(2) 非対称モデル

① $\Psi(p_1, p_2) \neq \Psi(p_2, p_1)$ の場合

前記(1)と同様にして

$S_1 = \{p_1 | p_1 = g_1(r, s)\cdot s,\ |s| = 1\}$

$S_2 = \{p_2 | p_2 = g_1(r, s)\cdot s^{-1},\ |s| = 1\}$,

$p_i = 0 \in S_i^+$, $i = 1, 2$

により定まる $p_1(r, s) \in S_1$, $p_2(r, s) \in S_2$ の対 (p_1, p_2) は、$K(r; p_1, p_2)$ の*zerotuple* である。

注1：この S_1, S_2 が本節の(3)に示す(a)～(d)の条件を満たせば、

$p_1(r; z) = g_1(r, z)\cdot z$

$|p_1| \leqq 1$　for　$z \in L$

$p_2(r; z) = g_1(r, z)\cdot z^{-1}$

$|p_2| \leqq 1$

なる等角写像 $(L^+ \to S_1^+,\ L^- \to S_2^+)$ と *smooth contour* L が存在する。

注2：一般的には、前記(1)と異なりLは、単位円(*unit circle*)でない。

② $\Psi(p_1, p_2) \neq \Psi(p_2, p_1)$ で、$\Psi(p_1, p_2)$ が、$\delta = f(p_1, p_2)$ の関数となる場合

例えば、$f(p_1, p_2) := r_1 p_1 + r_2 p_2$ とおいて $K\{r; p_1, (\delta - r_1 p_1)/r_2\} = 0$ なる p_1 の2次式を解いて、

$p_1(r; \delta) := (\delta + \sqrt{D(\delta)})/2r_1$

但し、$\delta \in D := \{\delta : Re(\delta) \leqq 1\}$

$p_2(r; \delta) := (\delta - \sqrt{D(\delta)})/2r_2$

と表せば、$(p_1(\delta), p_2(\delta))$ は、$K(r; p_1, p_2)$ の *zerotuple* である。

注1：この方法は、*zerotuple* (p_1, p_2) が、δ 面で定義されている点で5．2節の①と同様の方法である。

注2：この場合、①の方法による p_1, p_2 に対しては、*non-selfintersecting* が保証されない。この事実は、*symmetric case* のとき $p_2 = P(p_1)$ $|p_1| = 1$ に対しても同様である。

(3) 一般モデル

より一般的な酔歩運動 $\{x_n, y_n\} \in S := \{0, 1, 2, \cdots\} \times \{0, 1, 2, \cdots\}$、すなわち

$x_{n+1} = [x_n - s_n]^+ + a_n$、$y_{n+1} = [y_n - t_n]^+ + b_n$, $n = 0, 1, 2, \cdots$

但し、$x_0 = x \geqq 0$, $y_0 = y \geqq 0$, $(s_n, t_n) \in \{0, 1\} \times \{0, 1\}$, $(a_n, b_n) \in S$

において $\{x_n, y_n\}$ の母関数 $\Phi(p_1, p_2)$ の *kernel* は、次式で表される[3]。

$K(p_1, p_2) := p_1 p_2 - p_1 p_2 \Psi(p_1, p_2)$

但し、$\Psi(p_1, p_2) = c_0 \beta_0(x) + c_1/p_1 \beta_1(x) + c_2/p_2 \beta_2(x) + c_3/p_1 p_2 \beta_3(x)$

$\beta_n(x)$, $n = 0 \sim 3$ は、分布関数のLST,

$x := \lambda(1 - r_1 p_1 - r_2 p_2)$

$\varepsilon_{i,j} := [s_n = i, t_n = j]) = Pr\{s_n = i, t_n = j\}$

$c_0 = \varepsilon_{0,0}$, $c_1 = \varepsilon_{1,0}$, $c_2 = \varepsilon_{0,1}$, $c_3 = \varepsilon_{1,1}$

このカーネルの *zerotuple* (p_1, p_2) も、上記の(2)-②の方法により求められ、*contour* S_1, S_2 $(p_1 \in S_1,\ p_2 \in S_2)$ は、次の条件を満足する。

*(a)　S_1, S_2 は、*simple smooth contour* である。

(b)　$p_1 = 0 \in S_1^+$, $p_1 = \infty \in S_1^-$, $p_2 = 0 \in S_2^+$, $p_2 = \infty \in S_2^-$

(c)　$S_1(S_2)$ は、$S_2(S_1)$ へ1対1に写像される。すなわち、$p_2 = \omega_1(p_1)$, $p_1 \in S_1$, $p_2 \in S_2$ なる一価関数が存在する。

*(d)　p_1 が、S_1 上を反時計回りに回転すれば、p_2 は S_2 上を時計回りに回転する。

注1：上記(a), (d)の条件が、境界値問題の定式化に本質的である。

但し、(b), (c)を付加しないと数値解析が非常に複雑となる。

注2：上記(b)が成立するためには、条件が必要(対称の場合は不要である)。

注3：$c_1 = c_2$, $\beta_1(x) = \beta_2(x)$ のとき対称となり、$\Psi(p_1, p_2) = \Psi(p_2, p_1)$ である。

注4：本モデル以外は、現在未解決である[3]。

5．2　待ち行列モデル(I)

M/G/S形の待ち行列の解析に現れるカーネルについて要約する。

$K(p_1, p_2) := p_1 p_2 - r\beta\{S + \lambda_1(1 - p_1) + \lambda_2(1 - p_2)\}$, $0 < r \leqq 1$, $0 \leqq S$

$p_1 = x/r_1$, $p_2 = y/r_2$ とおけば、但し、$r_i = \lambda_i/\lambda$, $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$, ($r < 1$ のとき　$S = 0$)

$K(x, y) = [xy - r_1 r_2 \; r \cdot \beta\{S + \lambda(1 - x - y)\}] / r_1 r_2$

は、ポアソン核（*Poisson kernel*）と呼ばれる。これは、対称である。従って、前節の結果が適用されるが、ポアソン核のため更に詳細な議論（$|s| = 1 \to \delta \in D$ の変換により、*zerotuple*(p_1, p_2) の厳密式の導出：以下の①, ②）が可能である。但し、$r_1 \geqq r_2$とする。

① $K(p_1, p_2) = 0$は、下記のようにsの2次式である（gの2次式ではない）。

$\delta - (r_1 s + r_2 s^{-1})\sqrt{r}\sqrt{\beta\{S + \lambda(1-\delta)\}} = 0$

$|s| = 1 \to \delta \in D$により、$(p_1 = g_1(r, s) \cdot s, \; p_2 = g_1(r, s) \cdot s^{-1})$ が変換され、

$p_1(\delta) = (\delta + \sqrt{b(\delta)}) / 2r_1$

$p_2(\delta) = (\delta - \sqrt{b(\delta)}) / 2r_2$

但し、$\delta \in D$、$D := \{\delta \mid \delta = (r_1 s + r_2 s^{-1}) \cdot g_1(r, s) \text{ for } |s| = 1\}$

$b(\delta) := \delta^2 - 4 r_1 r_2 r \beta\{S + \lambda(1-\delta)\}$,

$Re(\delta) \leqq 1 + Re(S) / \lambda$

とおくとき、$(p_1(\delta), p_2(\delta))$ は$K(p_1, p_2)$ の *zerotuple*(p_1, p_2) である。

② $F = \{w : x^2 + y^2 = 4 r_1 r_2 r \beta\{S + \lambda(1 - x)\}\}$ より定まる $w = x + iy \in F$に対して

$(p_1 = w / 2r_1, \; p_2 = \bar{w} / 2r_2)$

は、$K(p_1, p_2)$ の *zerotuple*(p_1, p_2) である。

Fは、次の極座標でも表される。

$$w = \frac{\delta(\theta)}{\cos\theta} e^{i\theta}, \quad 0 \leqq \theta \leqq 2\pi$$

但し、$\delta(\theta)$ は、$t(\delta, \theta) = 0$の単位円内の実根である。

③ $b(\delta) = 0$より定まる分岐点$\delta(0)$, $\delta(\pi)$, $|\delta| \leqq 1$ が作る次のスリットG

$G = \{p_1 \mid p_1 = \delta(\theta), \; 0 \leqq \theta \leqq 2\pi\}$

の写像$F\{(\delta = \delta(\theta), \; 0 \leqq \theta \leqq 2\pi) \to w\}$ すなわち、

$w = \delta + \sqrt{b(\delta)}$

$= \rho(\theta) \cdot e^{i\theta}$ 但し、$\rho(\theta) = \delta(\theta) / \cos\theta$, $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$

は、$|w| = |\rho(0)| \leqq 1$なる *simple smooth contour* である。

ここに、$b(\delta) := t(\delta, 0) \cdot t(\delta, \pi)$

$t(\delta, \theta) := \delta - \cos(\theta) \cdot 2\sqrt{r_1 r_2 r} \cdot \sqrt{\beta\{s + \lambda(1-\delta)\}} = 0$、$Re(\delta) \leqq 1 + Re(s) / \lambda$

注1：上記の map $(\theta \to w)$ は、$w = \delta + \sqrt{b(\delta)}$の map $(\delta \to w)$ に等価である。

注2：分岐点（*branching point*）

注3：Fは、*egg-shaped contour*（実軸対象）で、$|w| \leqq 1$ for $w \in F$である。

補足：

$K(p_1, p_2) := p_1 p_2 - \beta\{\lambda_1(1 - p_1) + \lambda_2(1 - p_2)\}$ において

$Z(p_1, p_2) := p_1 - \frac{1}{p_2}\beta\{\lambda_1(1 - p_1) + \lambda_2(1 - p_2)\} = k(p_1, p_2) / p_2 = 0$

の$|p_1| \leqq 1$ なる根を $p_1 = P(p_2)$ と表せば、$(P(s), s)$ for $\delta \leqq |s| \leqq 1$は、$K(p_1, p_2)$ の *zerotuple*(p_1, p_2) である。但し、δは、$Z(1, p_2) = 0$ の$|p_2| \leqq 1$ なる根で、$\delta = 1$ for $\lambda_2 h \leqq 1$, $\delta < 1$ for $\lambda_2 h > 1$である。

注1：このとき、$S_1 = \{p_1 \mid p_1 = P(s), \; \delta \leqq |s| \leqq 1\}$ が、*simple smooth contour* である保証がない。

$\beta(s)$ が、指数分布のLSTの場合は問題なし。

注2：$P(p_2)$ は、$|P| \leqq 1$において一意に定まる。

5.3 待ち行列モデル（II）

M／M／S形の待ち行列の解析に現れるカーネルについて要約する。

① $K(p_1, p_2) = 0$ は、p_2の2次式である。その根は、

$p_1 = P_1(p_1) = \{b(p_1) + \sqrt{D(p_1)}\} / a(p_1)$、

$p_2 = P_2(p_1) = \{b(p_1) - \sqrt{D(p_1)}\} / a(p_1)$

である。

② $D(p_1) = 0$ より定まる分岐点$\delta(0)$、$\delta(\pi)$、$|\delta| \leqq 1$が作るスリットG

$G = (p_1 \mid p_1 = \delta(\theta), \; 0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$

の写像$F(p_1 \to p_2)$ すなわち、

$p_2 = P_1(\delta(\theta)) = \rho(\theta) \cdot e^{i\theta}$

は、$|p_2| = |\rho(\theta)| \leqq 1$ なる*closed smoth contour*（実軸対称）である。

$p_1 \in G$ のとき、$(p_1, p_2 = P_2(p_1))$ は、$K(p_1, p_2)$ の *zerotuple*(p_1, p_2) である。

但し、$D(p_1) = t(p_1, 0) \cdot t(p_1, \pi)$

$\delta(\theta)$ は、$t(p_1, \theta) = 0$の単位円内の実根である。

注1：$(p_1, p_2 = P_1(p_1))$, $|p_1| \leqq 1$は、一般には$|P_1(p_1)| \leqq 1$が保証されない。

6. おわりに

本論文で明らかにされた点および今後の研究課題を、以下に要約する。

待ち室容量が無限大の複数待ち行列システムは、通

常は状態数無限の“多次元マルコフモデル”に定式化して解析される。母関数法による待ち呼数の同時分布の解析（母関数の決定）には、2．2節に示した4つの手法のいずれかが適用される。これらの方法により解析可能な状態数無限の多次元マルコフモデルは、まだ特定なモデルに限定されており、2次元、3次元のモデルの解析法が最近ようやく問題にされ始めたところである。状態数有限の多次元マルコフモデルの状態方程式（平衡方程式）は、一般的に多元連立1次方程式で表され、その解法アルゴリズムは基本的には解決されている。なお、本論文では離散量である待ち呼数の同時分布の解析法（母関数法）について考察したが、

① 連続量の多次元マルコフモデルの解析法（ラプラス変換法）

仕事量などが状態変数となる（*workload analysis* など）

② 離散量と連続量の混在した多次元マルコフモデルの解析法

待ち呼数とサービス経過時間などが状態変数となる（補助変数法など）

の面からも、基礎的な検討が必要である。

参考文献

〔1〕 O.J. Boxma : “Models of two queues : a few new views,” *Teletraffic Analysis and Computer Performance Evaluation*, Edited by O.J. Boxma, J.W. Cohen and H. C.Timjs, pp. 75-98, North-Holland (1986).

〔2〕 J.W. Cohen and O.j. Boxma : “Boundary Value Problems in Queueing System Analysis.” North-Holland, Amsterdam (1983).

〔3〕 J. W. Cohen : “Boundary Value Problems in Queueing Theory,” *Queueing Systems ; Theory and Applications*, 3 , 2, pp. 97-128 (1988).

〔4〕 G. Fayolle and G. lasnogorodski : “Two coupled processors : the reduction to a Riemann-Hilbert problem,” *Zeitshrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und vermandte Gebeite*, 47, 3, pp. 325-351 (1979).

〔5〕藤木、雁部：“通信トラヒック理論”、丸善（昭55）.

〔6〕市川、宮沢：“待ち人数に依存したサービス規律を持つ2タイプ型待ち行列”，日本OR学会春季研究発表会アブストラクト集、pp. 89-90 (1989).

〔7〕片山：“移動扱者による同時サービスモデルの解析”，日本OR学会春季研究発表会アブストラクト集，pp. 157-158 (1987).

〔8〕片山：“準制限式ポーリングシステムの待ち時間解析”，平成2年度電気関係学会北陸支部連合大会講演論文集，C－35，pp. 358-359 (1990).