人生いろいろ，ソリトンもいろいろ

Luiz A. FERREIRA* ・ 澤渡 信之† ・ 戸田 晃一
（工学部 教養教育）

相対論的な場の理論にあらわれる数理模型がもつ解のうちで，空間的に局在する解であるソリトンという概念を紹介する。

キーワード: ゲージ理論，トポロジカルなソリトン，可積分性

1. はじめに

2009年8月にブラジル・サンパウロ州にあるサンカルロス市に再び滞在する機会をえた[1]。サンパウロ大学サンカルロス校物理学研究所（IFSC/USP）において，ゲージ理論に対する非摂動的解析に関する研究および学術交流を行ってきた。IFSC/USP は（著者の一人である）Ferreira 氏[2] が教授として勤務しており，彼の学生や同僚の方々と毎日のように理論物理や数理物理に関する議論をし，非常に有意義な 40 日間であった。ブラジルにはたくさんのビールの種類があり，折に触れて試した。以前の紀要にも書いたが，お酒があると議論はより活発になり研究がすすむ。その際の研究成果の一部は学術論文として既に発表している。その滞在中に私は（トポロジカルな）場の理論やゲージ場の理論に現れる模型がもつ解，特に**局在する解（ソリトン）**についての集中セミナーを行う機会があり，そのときに作成し配布した資料を基に加筆したのが本稿である。本稿では，相対論的な場の理論にあらわれる局在する解（ソリトン）について，具体的な例題を用いて，紹介する。

もともとソリトンとは，非線形波動の研究対象である浅水波現象の一つである孤立波（solitary wave）からつくられた言葉である。このソリトンの特徴は，粒子的な特徴をもっていることである。ここでの粒子的特徴とは，衝突などの相互作用によって壊れないという非常に安定した状態のことである [1]。例えば，非線形分散型の偏微分方程式である Korteweg-de Vries 方程式[3] [1, 2]：

$$\frac{\partial u}{\partial t}+6u\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}=0 \tag{1}$$

の特解の一つが

$$u(t,x)=2\kappa^2\mathrm{sech}^2\kappa(x-4\kappa^2 t) \tag{2}$$

である。これは，高さ $2\kappa^2$・幅 κ^{-1}・伝搬速度 $4\kappa^2$ の山一つの波形をした進行波解であるが，これがソリトンである。（もっと正確にいうと 1-ソリトンという。）このソリトンを二ヶ（2-ソリトン）衝突させても，相互作用はするが，最終的には壊れずに元の形を保存して運動を続ける。

現在，相対論的場の理論においては，もう少し条件を緩めて，安定性をもつ有限エネルギーの解をソリトン（解）と呼ぶ[4]。非線形波動の場合の安定性は，非線形性と分散性のつりあいから生まれるのである。しかし，この相対論的な場の理論におけるソリトン（解）がもつ安定性は，トポロジカル不変量（位相的不変量）と呼ばれるトポロジカルチャージ（位相電荷）の存在によって達成される。このソリトンを，非線形波動の場合のソリトンと区別するために，**トポロジカルソリトン**[5] と呼ぶことがある [2]-[7]。

非線形波動におけるソリトン や トポロジカルソリトンがもつ特徴的な性質や豊富な数理構造は，素粒

*Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo
†東京理科大学理工学部物理学科
[1] 前回はブラジル科学アカデミーからの招聘であったが，今回はサンパウロ州研究助成基金からの招聘であった。
[2] 2008 年夏に富山県立大学に短期間ではあるが滞在された。
[3] 浅水波を記述する, 代表的なソリトン方程式の一つである。
[4] ソリトンという言葉ができる以前より，素粒子物理において安定な孤立波は重要な研究対象であったようである [8]。
[5] 位相的ソリトン や 位相欠陥とも呼ばれる。

子，宇宙論，物性理論への応用 [9]-[12] だけにとどまらず工学の基礎研究や純粋数学の発展にも寄与している。本稿では，トポロジカルソリトンの基本事項について，二次元時空[6] の場合に絞って紹介する。

(記号)　本稿では

- $(\eta^{\mu\nu}) = \mathrm{diag}(1, -1)$
- $x_\mu = x_0(=t),\ x_1(=x)$
- $\partial_\mu = \dfrac{\partial}{\partial x_\mu}$

という記号をいたるところで使う。

2. 二次元時空上のソリトン

まず二次元時空上のソリトンについて紹介する。二次元時空のアクションを

$$\mathcal{I} = \int_{\mathcal{M}} \mathrm{d}^2 x \left\{ \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - U \right\} \tag{3}$$

で定義する。ここで，$\mathcal{M}$ をメトリックが $(\eta_{\mu\nu})$ である二次元多様体，$\phi = \phi(t, x)$ を（実）スカラー関数，そして $U = U(\phi)$ をポテンシャルとする。このとき，ラグラジアン密度 $\mathcal{L}(t, x)$ は

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(t,x) &= \frac{1}{2}\left(\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi\right) - U \\ &= \frac{1}{2}\left(\eta^{00}\partial_0\phi\partial_0\phi + \eta^{11}\partial_1\phi\partial_1\phi\right) - U \\ &= \frac{1}{2}\left\{(\partial_0\phi)^2 - (\partial_1\phi)^2\right\} - U \\ &= \frac{1}{2}(\partial_t\phi)^2 - \frac{1}{2}(\partial_x\phi)^2 - U \end{aligned} \tag{4}$$

と書き下すことができる。

それでは，次に考えているスカラー場の関数 ϕ が満たす運動方程式を求める。運動方程式は ハミルトンの原理によると， アクションの変分 $\delta\mathcal{I} = 0$，つまり

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0 \tag{5}$$

で与えられることが知られている [13]-[15]。

いま，

$$\begin{aligned} \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} &= \partial_\rho \frac{\partial}{\partial(\partial_\rho\phi)}\left\{\frac{1}{2}\left(\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi\right)\right\} \\ &= \frac{1}{2}\partial_\rho\left(\eta^{\mu\nu}\delta_{\mu\rho}\partial_\nu\phi + \eta^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\delta_{\nu\rho}\right) \\ &= \frac{1}{2}\partial_\rho\left(\eta^{\rho\nu}\partial_\nu\phi + \eta^{\mu\rho}\partial_\mu\phi\right) \\ &= \partial_\mu\partial^\mu\phi, \end{aligned} \tag{6}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = -\frac{\partial U}{\partial \phi} \tag{7}$$

なので、運動方程式 (5) は，具体的には

$$\partial_\mu\partial^\mu\phi + \frac{\partial U}{\partial \phi} = 0 \tag{8}$$

である。時間成分と空間成分を分離すると，

$$\begin{aligned} -\frac{\partial U}{\partial \phi} &= \eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu\phi \\ &= \eta^{00}\partial_0\partial_0\phi + \eta^{11}\partial_1\partial_1\phi \\ &= \partial_0^2\phi - \partial_1^2\phi \end{aligned} \tag{9}$$

となるので，最終的に運動方程式は

$$\partial_t^2\phi - \partial_x^2\phi = -\frac{\partial U}{\partial \phi} \tag{10}$$

となる。左辺は線形項のみなので，ポテンシャル U に依存する右辺に非線形項が含まれる。運動方程式 (10) が空間的に局在した解をもつように，$\phi(t, x)$ に対応するエネルギーを調べて，$\phi(t, x)$ と U に適切な条件を課す必要がある。エネルギーは，ネーターの定理によれば，時間並進に対する保存量である[7] 。より一般的にいうと，次の大域的な時空に関する平行移動 $\delta x^\mu =$ 定数の下でラグラジアンが不変であれば，**（正準）エネルギー・運動量テンソル**と呼ばれる保存量を

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\partial^\nu\phi - \eta^{\mu\nu}\mathcal{L} \tag{11}$$

と定義すれば，このときの保存則は

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0 \tag{12}$$

で与えられる。$\nu = 0$ ととると，

$$\begin{aligned} \partial_\mu T^{\mu 0} &= \partial_0 T^{00} + \partial_1 T^{10} \\ &= \partial_t T^{00} + \partial_x T^{10} \end{aligned} \tag{13}$$

なので，保存則 (12) を

$$\partial_t \mathcal{E}(t, x) + \partial_x \mathcal{P}(t, x) = 0 \tag{14}$$

[6] ここで，二次元時空とは時間 1 次元（t）・空間 1 次元（x）を意味する。

[7] 時間に関する平行移動の下で不変ということ。

と連続方程式の形に書き直すことにすると，エネルギー密度[8] $\mathcal{E}(t,x)(=T^{00})$ が系の時間並進に対する不変性から導かれ，運動量密度 $\mathcal{P}(t,x)(=T^{10})$ が系の空間並進に対する不変性から導かれることがはっきりとわかる。

次に，ラグランジアン密度 $\mathcal{L}$ (4) によって記述される力学系がもつ，スカラー場の関数 $\phi(t,x)$ に対するエネルギー $E[\phi]$ を求める。

$$\begin{aligned}
T^{00} &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_0\phi\right)}\partial^0\phi-\eta^{00}\mathcal{L}\\
&= \left(\partial_t\phi\right)\frac{\partial}{\partial\left(\partial_t\phi\right)}\left\{\frac{1}{2}\left(\partial_t\phi\right)^2-\frac{1}{2}\left(\partial_x\phi\right)^2-U\right\}\\
&\quad -\left\{\frac{1}{2}\left(\partial_t\phi\right)^2-\frac{1}{2}\left(\partial_x\phi\right)^2-U\right\}\\
&= \left(\partial_t\phi\right)^2-\frac{1}{2}\left(\partial_t\phi\right)^2+\frac{1}{2}\left(\partial_x\phi\right)^2+U\\
&= \frac{1}{2}\left(\partial_t\phi\right)^2+\frac{1}{2}\left(\partial_x\phi\right)^2+U
\end{aligned} \tag{15}$$

より，エネルギー密度は

$$\mathcal{E}(t,x)=\frac{1}{2}\left(\partial_t\phi\right)^2+\frac{1}{2}\left(\partial_x\phi\right)^2+U \tag{16}$$

となる。エネルギー $E[\phi]$ はこの $\mathcal{E}(t,x)$ を全空間で積分すればよい，つまり

$$E[\phi]=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x\ \mathcal{E}(t,x) \tag{17}$$

で与えられる。

これ以降の計算では，時間に依存した理論[9] を直接扱う代わりに，まず時間に依存しない場合（**静的な場合**[10]）で計算し，次にえられた静的な場合の物理量の全てにローレンツ変換を行うことで時間に依存する物理量をえることにする[11]。静的な理論では，例えば，運動方程式が

$$\partial_x^2\phi=\frac{\partial U}{\partial\phi} \tag{18}$$

であり，エネルギーが

$$E[\phi]=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x\ \left(\frac{1}{2}\left(\partial_x\phi\right)^2+U\right) \tag{19}$$

である。有限なエネルギーをもつのであれば，$x\to\pm\infty$（無限遠方）でのスカラー場の関数 $\phi(t,x)$，その導関数 $\partial_x\phi$，そしてポテンシャル U の振る舞いに対して何らかの条件（**境界条件**）を課す必要がある。

[8] つまりハミルトニアン密度である。
[9] 運動方程式，ラグラジアンやハミルトニアンなどのこと。
[10] $\partial_t\phi=0$ ということ。
[11] この方が全体の見通しが良いと思うので。

まず第一に，エネルギーがある有限値をとるならば，エネルギーはとりうる極小の値でなければならない。いま，ある定数関数 g がポテンシャル $U(\phi)$ を

$$U(g)=0 \tag{20}$$

を満たすとする。このとき，理論の運動項（$\partial_x\phi$）も

$$\partial_x\phi=\partial_x g=0 \tag{21}$$

である。その結果，$\phi(t,x)=g$ のときのエネルギーは

$$E[g]=0 \tag{22}$$

であり，これが極小値となっている。そこで境界条件を

- $U(\phi)=0$ を満たす静的な解を $\phi(t,x)=g$（定数関数）とする
- $x\to\pm\infty$ のとき，場の関数は $\phi(t,x)\to g$ とする

と設定すれば，有限なエネルギーをえられそうである。一見するとうまくいきそうであるが，次の重大な事実が知られている [6], [7]：

ポテンシャルがただ一つ極小値をもつのであれば，上記の条件設定では有限エネルギーになりえない

この事実を確かめるために，古典力学の知識を用いる。まず，スカラー場の関数が満たす静的な運動方程式 (18) を，ポテンシャル $W=-U(\phi)$ をもつ単位質量の一粒子が満たすニュートンの運動方程式（x：時間，$\phi(x)$：粒子の位置）：

$$\partial_x^2\phi=-\frac{\partial W}{\partial\phi} \tag{23}$$

であるとみる。$\dfrac{\partial^2 U}{\partial\phi^2}>0$ のとき U の極小値を与える $\phi=g$ は，この運動方程式 (23) でみると，

$$\frac{\partial^2 W}{\partial\phi^2}=-\frac{\partial^2 U}{\partial\phi^2}<0 \tag{24}$$

となるので，W でみたときには極大値を与える。次に粒子の力学系に対するラグラジアンは

$$\mathcal{L}=\frac{1}{2}\left(\partial_x\phi\right)^2-W \tag{25}$$

で与えられるが，これは明らかに，スカラー場のエネルギー $E[\phi]$(19) の被積分関数と一致している。よって，このエネルギー $E[\phi]$(19) は粒子の力学系に対するアクションとみなせる。

いま，スカラー場の力学系におけるポテンシャル U がただ一つの極小値，つまり（大域的な）最小値，$U(g)=0$ をもつと仮定する。この時，粒子の力学系でみると，$W(g)=0$ という最大値をただ一つもつことになる。つまり，関数 $W=W(\phi)$ はただ一点 $(\phi,W)=(g,0)$ で接している上に凸のグラフである。時刻 x が進むと，エネルギーの値は変化するだろうが，再び有限値となるためには，$x\to+\infty$ でエネルギーが再び（最低値である）零にならなければならない。しかしながら，このことは，$\phi(x)$ が $x=+\infty$ で，U が極小（つまり W が極大）となるような，ϕ の値を少なくとももう一つはもたなければならないことを意味している。

よって，エネルギーが有限となるためには，ポテンシャル U はただ一つではなくある程度多くの極小値をもたなければならないということになる。いま，スカラー場の関数 ϕ が N ヶの定数関数 $\phi=g^{(i)}$（$i=1,2,...,N$，$i<j$ なら $g^{(i)}<g^{(j)}$）をもつとする。例えば，$N=3$ の場合を考えてみる。このとき，ϕ 軸の三点 $\phi=g^{(1)},g^{(2)},g^{(3)}$ で接しているので，粒子は $g^{(1)}\to g^{(2)}$，$g^{(2)}\to g^{(3)}$，$g^{(2)}\to g^{(1)}$，$g^{(3)}\to g^{(2)}$ と 4 区間の運動が可能である。（この $g^{(i)}$ を，習慣として，**（古典的な）真空**と呼ぶことにする。）このようにして，力学系が時間発展すると，一つの真空からもう一つの真空に移るのである。いったんもう一方の真空（$g^{(1)}\to g^{(2)}$ の場合でいえば $g^{(2)}$）に到達すれば，それ以上前進できない。古典力学的描像であれば，（$\phi=g^{(2)}$ の時のように，）$x\to+\infty$ の時に速度とポテンシャルが零となってしまえば，粒子は前進するための速度をもつことはできない。

最後にもう一度まとめると，

- ポテンシャル $U(\phi)$ がただ一つの最小値しかもたないときには，ソリトン解は存在しない
- ポテンシャル $U(\phi)$ がとびとびに（離散的に）N ヶの極小値をもつときには，$2(N-1)$ ヶの（連結する）ソリトン解が存在する

次に，実際に静的なスカラー場の運動方程式 (18) を解いていく。運動方程式 (18) の両辺に $\partial_x\phi$ をかけると，

$$(\partial_x\phi)\left(\partial_x^2\phi\right)=(\partial_x\phi)\frac{\partial U}{\partial\phi} \tag{26}$$

となるが，ここで

$$\text{左辺} = (\partial_x\phi)\left(\partial_x^2\phi\right)=\frac{1}{2}\partial_x\left\{(\partial_x\phi)^2\right\}, \tag{27}$$

$$\text{右辺} = (\partial_x\phi)\frac{\partial U}{\partial\phi}=\frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial U}{\partial\phi}=\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x} \tag{28}$$

に注意すると，

$$\frac{1}{2}\partial_x\left\{(\partial_x\phi)^2\right\}=\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x} \tag{29}$$

と整理できる。この両辺を x で不定積分すると，

$$\frac{1}{2}(\partial_x\phi)^2=U+C \tag{30}$$

となる。ここで C は積分定数である。しかし，境界条件より $x\to+\infty$ のときに $\partial_x\phi\to0$ かつ $U(\phi)\to0$ なので，

$$C=\left\{\frac{1}{2}(\partial_x\phi)^2-U\right\}\bigg|_{x=+\infty}=0 \tag{31}$$

とできる。つまり，$x\to+\infty$ で積分定数 C は零となるが，定数であるから，どの点においても零ということである。つまり，この積分定数 C は設定された境界条件により消すことができる。これは ビリアル定理[12] ：

$$\frac{1}{2}(\partial_x\phi)^2=U \tag{32}$$

の結果に他ならない。このとき，

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\phi}=\pm\frac{1}{\sqrt{2U}} \tag{33}$$

とできるので，あとは変数分離をした後に両辺を積分すれば，

$$x=x_0\pm\int_{\phi(x_0)}^{\phi(x)}\frac{\mathrm{d}\phi}{\sqrt{2U}} \tag{34}$$

をえる。つまり，求積法で解くことが可能となる。この計算プロセスで解ける性質を（古典的な意味で）**可積分性**と，求積法で解ける力学系を**可積分系**と各々呼ぶ。

次に具体例を挙げて，これまでに紹介した計算過程をみていく。

（具 体 例）Polyakov の ϕ^4 模型

ここで，これまでの議論の具体例として，Polyakov の ϕ^4 模型[13] を挙げる [6]。

$m^2>0$，$\lambda>0$ としてポテンシャル U を

$$U(\phi)=\frac{m^4}{4\lambda}-\frac{m^2}{2}\phi^2+\frac{\lambda}{4}\phi^4 \tag{35}$$

[12] このビリアルは人名ではない。

[13] この ϕ^4 模型は，4 次元時空におけるボーズ型の場の模型で繰り込み法による解析が適用できる唯一のものとして知られている。

とすると，運動方程式として

$$\partial_t^2\phi - \partial_x^2\phi = m^2\phi - \lambda\phi^3 \tag{36}$$

をえる。これが Polyakov の ϕ^4 模型と呼ばれる相対論的場の理論における代表的な模型である。このポテンシャル $U(35)$ は

$$U(\phi) = \frac{\lambda}{4}\left(\phi^2 - \frac{m^2}{\lambda}\right)^2 \tag{37}$$

と平方完成ができ，$U = 0$ を満たす解として，

$$\phi = \pm\frac{m}{\sqrt{\lambda}} \tag{38}$$

をえる。この解は定数解であり，これらを

$$g^{(1)} \quad = \quad -\frac{m}{\sqrt{\lambda}} \tag{39}$$

$$g^{(2)} \quad = \quad +\frac{m}{\sqrt{\lambda}} \tag{40}$$

とすると，境界条件 $x \to \pm\infty$ のとき $\partial_x\phi \to 0$ により，$\phi = g^{(i)}$（$i = 1, 2$）のときエネルギーは零となる。その結果として，ϕ^4 模型がもつ空間に局在した解は，無限遠方 $x \to \pm\infty$ では二つある真空の内の一つになっている必要がある。

ϕ^4 模型の静的な運動方程式は

$$\partial_x^2\phi = -m^2\phi + \lambda\phi^3 \tag{41}$$

となるので，次のような求積法で解くことができる。既に説明した求積法の公式 (34) に，ϕ^4 模型のポテンシャル $U(35)$ を代入すると，

$$x = x_0 \pm \sqrt{\frac{2}{\lambda}}\int_{\phi(x_0)}^{\phi(x)}\frac{\mathrm{d}\phi}{\phi^2 - \frac{m^2}{\lambda}} \tag{42}$$

となる。被積分関数を

$$\int\frac{\mathrm{d}\phi}{\phi^2 - \frac{m^2}{\lambda}} = -\int\frac{\mathrm{d}\phi}{\left(\frac{m}{\sqrt{\lambda}}\right)^2 - \phi^2} \tag{43}$$

と書き直し，ここで $\phi \to -\phi$ とした後に $\Phi = \dfrac{\sqrt{\lambda}}{m}\phi$ と置換すると，$\dfrac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}\phi} = \dfrac{\sqrt{\lambda}}{m}$ に注意して，

$$\begin{aligned}\int\frac{\mathrm{d}\phi}{\left(\frac{m}{\sqrt{\lambda}}\right)^2 - \phi^2} &= \int\frac{\mathrm{d}\phi}{\left(\frac{m}{\sqrt{\lambda}}\right)^2\left\{1 - \left(\frac{\sqrt{\lambda}}{m}\right)^2\right\}\phi^2} \\ &= \frac{\sqrt{\lambda}}{m}\int\frac{\mathrm{d}\Phi}{1 - \Phi^2}\end{aligned} \tag{44}$$

となる。故に，次の積分：

$$x = x_0 \pm \frac{\sqrt{2}}{m}\int_0^{\Phi(x)}\frac{\mathrm{d}\Phi}{1 - \Phi^2} \tag{45}$$

を計算すればよいことになる。x が全空間を動くとき，スカラー場の関数 $\phi(x)$ がいまいる真空から別の真空に移る。そうであれば，スカラー場の関数 $\phi(x)$ は $\left(-\frac{m}{\sqrt{\lambda}}, +\frac{m}{\sqrt{\lambda}}\right)$ の範囲で値をとるということである。つまり，$|\phi| < \dfrac{m}{\sqrt{\lambda}}$ の時には，$|\Phi| < 1$ となる。積分実行のために Φ を

$$\Phi = \tanh y \tag{46}$$

と変換すると，

$$1 = \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}y} \times \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\Phi} = \mathrm{sech}^2 y\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\Phi} \tag{47}$$

となるので，

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\Phi} &= \frac{1}{\mathrm{sech}^2 y} \\ &= \frac{1}{1 - \tanh^2 y} \\ &= \frac{1}{1 - \Phi^2}\end{aligned} \tag{48}$$

とできる。ここで，$\mathrm{sech}^2 x + \tanh^2 x = 1$ を用いた。変数分離法で積分を実行すると，

$$\begin{aligned}\int_0^{\Phi(x)}\frac{\mathrm{d}\Phi}{1 - \Phi^2} &= \int_0^{\Phi(x)}\mathrm{d}y \\ &= [y]_0^{\Phi(x)} \\ &= \left[\tanh^{-1}\Phi\right]_0^{\Phi(x)} \\ &= \tanh^{-1}\Phi\end{aligned} \tag{49}$$

をえるので，まとめると

$$x = x_0 \pm \frac{\sqrt{2}}{m}\tanh^{-1}\Phi \tag{50}$$

と求積できたことになる。よって，

$$\Phi = \tanh\left\{\frac{m}{\sqrt{2}}(x - x_0)\right\} \tag{51}$$

つまり，ϕ^4 模型の静的な運動方程式 (41) の厳密解は

$$\phi = \pm\frac{m}{\sqrt{\lambda}}\tanh\left\{\frac{m}{\sqrt{2}}(x - x_0)\right\} \tag{52}$$

である。ここで，$\tanh(\pm x) = \pm\tanh x$ を用いた。厳密解 (52) の $+$ 符号をキンク解，$-$ 符号を反キンク解と呼ぶ。

それでは，キンク解とはどのようなものだろうか。静的なスカラー関数のエネルギー密度は，そのエネルギー $E[\phi]$ の式 (19) より，

$$\mathcal{E}(x) = \frac{1}{2}\left(\partial_x \phi\right)^2 + U \tag{53}$$

である。これは，ビリアル定理 (32) と ϕ^4 模型のポテンシャル U(37) を用いて，

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(x) &= 2U \\ &= \frac{\lambda}{2}\left(\phi^2 - \frac{m^2}{\lambda}\right)^2 \end{aligned} \tag{54}$$

とでき，ここに ϕ^4 模型のキンク解 (52) を代入して整理すると，

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(x) &= \frac{\lambda}{2}\left[\frac{m^2}{\lambda}\tanh^2\left\{\frac{m}{\sqrt{2}}\left(x - x_0\right)\right\} - \frac{m^2}{\lambda}\right]^2 \\ &= \frac{m^4}{2\lambda}\left[\tanh^2\left\{\frac{m}{\sqrt{2}}\left(x - x_0\right)\right\} - 1\right]^2 \\ &= \frac{m^4}{2\lambda}\mathrm{sech}^4\left\{\frac{m}{\sqrt{2}}\left(x - x_0\right)\right\} \end{aligned} \tag{55}$$

ここでも，$\mathrm{sech}^2 x + \tanh^2 x = 1$ を用いた。この $\mathcal{E}(x)$(55) の波形は，$x = x_0$ でピークであり，$x \to \pm\infty$ で $\mathcal{E}(x) \to 0$ という山を一つもった孤立波，つまりソリトンになっている。

この $\mathcal{E}(x)$(55) は積分可能である。実際、

$$\begin{aligned} E[\phi] &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x\ \mathcal{E}(x) \\ &= \frac{m^4}{2\lambda}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x\ \mathrm{sech}^4\left\{\frac{m}{\sqrt{2}}\left(x - x_0\right)\right\} \end{aligned} \tag{56}$$

であり，この積分を実行するために，独立変数を $X = \dfrac{m}{\sqrt{2}}\left(x - x_0\right)$ と置換すると，

$$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}x} = \frac{m}{\sqrt{2}} \tag{57}$$

なので，

$$\begin{aligned} E[\phi] &= \frac{m^4}{2\lambda} \times \frac{\sqrt{2}}{m}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}X\ \mathrm{sech}^4 X \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{m^3}{\lambda}\left[\frac{2}{3}\tanh X + \frac{1}{3}\mathrm{sech}^2 X \tanh X\right]_{-\infty}^{+\infty} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{m^3}{\lambda}\left(\frac{2}{3} \times 2 + 0\right) \\ &= \frac{2\sqrt{2}}{3}\frac{m^3}{\lambda} \end{aligned} \tag{58}$$

をえる。（後に使うので，この値を M としておく。）ここで，$x \to \pm\infty$ のとき $\tanh x \to \pm 1$（複号同番）かつ $\mathrm{sech} x \to 0$ を用いた。つまり，$\mathcal{E}(x)$ の積分値は有限となった。よって，ϕ^4 模型のキンク解 (52) はまさに相対論的場の理論におけるソリトンである。

次に，上述した通りローレンツ変換を用いて，静的な解を時間[14] 発展可能な解の形にする。動く座標系を x' とすると，ローレンツ変換は

$$\left(x - x_0\right)' = \frac{\left(x - x_0\right) - ut}{\sqrt{1 - u^2}} \tag{59}$$

で与えられる。その時，ローレンツ変換をした解，つまり動く座標系上の解 ϕ_u は

$$\phi_u = \pm\frac{m}{\sqrt{\lambda}}\tanh\left\{\frac{m}{\sqrt{2}}\frac{\left(x - x_0\right) - ut}{\sqrt{1 - u^2}}\right\} \tag{60}$$

となる。ここで，tanh の引数の部分が無次元化されていることに注意したい。距離（または幅）$x - x_0$ をプランク定数 $\hbar$ と 光速 c を $1/m$ にスケーリングしているローレンツ変換で変換したことによる。距離 $x - x_0$ は $\sqrt{1 - u^2}/m$ に応じて変化するのであるが，これはまさに，速度が大きくなるにつれて質量が増加するという，相対論的な粒子がもつ質量と同じ振る舞いである。更に，もし ϕ^4 模型に対する時間依存するエネルギー (17) を計算すると，

$$E[\phi_u] = \frac{M}{\sqrt{1 - u^2}} \tag{61}$$

という，アインシュタインの質量とエネルギーの式と厳密に一致することがわかる。そこで量子論の世界では，キンク解が本当の “粒子” として認識されることが期待できる。

3. トポロジカルな分類

近年，メトリックを含まない場の理論の有効性は広く認識されている。そのような理論は**トポロジカルな場の理論**と呼ばれ，従来の物理学とは異なる自然現象に対する描像を与えてくれる。本節では，このトポロジカルな量について簡単な解説を与える[15] 。

ここでもラグラジアン密度 $\mathcal{L}$ が

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\partial_t \phi\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\partial_x \phi\right)^2 - U \tag{62}$$

のときで議論する。いま，ポテンシャル U が無数に多くの極小値をもつとする。有限エネルギー解に興味があるので，ある初期時刻 t_0 に対する場の関数 $\phi(t_0, x)$

[14] もちろん，ここでの時刻とは t である。
[15] 数学的な厳密性を少し犠牲にするが，雰囲気が伝われば幸いである。

の無限遠方 $x \to \infty$ に対する振る舞いを考える。このとき有限エネルギーとなるためには，場の関数が，ポテンシャル U がもつ無数に多くの極小値の一つである $U(g^{(1)})$ を与える，$g^{(1)}$ に近づかなければならない（$\phi(t_0, x) \to g^{(1)}$）ことはこれまでの考察より察しがつく。（いま，時計の針は t_0 で止まっている状態であることに注意しておく。）それでは時計の針を動かしてみよう。このとき，任意の x で場の関数 $\phi(t, x)$ は時刻 t に対して滑らかであると仮定する[16]。場の関数 $\phi(t_0, \infty)$ $(= g^{(1)})$ に対応するエネルギー，つまり真空エネルギーは有限かつ保存量であり，更に $U(\phi)$ の極小値 $U(g^{(1)})$ に関連するので，極小エネルギーである。よって，時計が動いている間，この極小エネルギーは常に同じ値をとりつづける。従って，このような状況が可能な場合は，$\phi(t, \infty)$ が $U(g^{(i)})$ を極小値とする真空 $g^{(i)}$（の一部）に値をとるときのみである。真空が複数存在するので，エネルギーが同じ値をとる可能性も複数ある。しかしながら，ある真空から他の真空へと移るときに場の関数 $\phi(t, \infty)$ は連続的に変化する必要がある。このようにして，（我々が興味をもっている）エネルギーの有限性はつぶれてしまう。

まとめると，場の関数は各点 x においてただ一つの真空しかもたない[17]，つまり

真空解は定常的である

といえる。もう一方の無限遠方 $x \to -\infty$ でも同様のことがいえる。

上述した通り有限なエネルギーとなるべしという要請を壊さないように，これらのセクターは，時刻 t を変化させることで，他のセクターと各々連続的に連結していてはいけない。このとき，このようなセクターを**トポロジカル（に不連結）なセクター**と呼ぶ。前節の具体例で挙げた Polyakov の ϕ^4 模型では，次の表にまとめたような，S1 から S4 の 4 つのトポロジカルなセクターと対応する解の関係を見いだすことができる：

セクター	$\phi(-\infty)$	$\phi(+\infty)$	解
S1	$-m_0$	$+m_0$	キンク解
S2	$+m_0$	$-m_0$	反キンク解
S3	$-m_0$	$-m_0$	定数解
S4	$+m_0$	$+m_0$	定数解

ここで次の量

$$k^\mu = \frac{\sqrt{\lambda}}{m}\epsilon^{\mu\nu}\partial_\nu\phi \tag{63}$$

を考える。これは明らかに

$$\begin{aligned}
\partial_\mu k^\mu &= \frac{\sqrt{\lambda}}{m}\epsilon^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu\phi \\
&= \frac{\sqrt{\lambda}}{m}\left(\epsilon^{01}\partial_0\partial_1\phi + \epsilon^{10}\partial_1\partial_0\phi\right) \\
&= \frac{\sqrt{\lambda}}{m}\left(\partial_t\partial_x\phi - \partial_x\partial_t\phi\right) \\
&= 0
\end{aligned} \tag{64}$$

と発散が零となる[18]。ここで注意すべきことは，k^μ という量が無発散である，つまり保存量である，という事実は，運動方程式（や他の保存則）から導かれるものではないということである。この k^μ を**トポロジカルカレント**と呼ぶ。このカレントの時間成分 k^0 は

$$\begin{aligned}
k^0 &= \frac{\sqrt{\lambda}}{m}\epsilon^{0\nu}\partial_\nu\phi \\
&= \frac{\sqrt{\lambda}}{m}\epsilon^{01}\partial_1\phi \\
&= \frac{\sqrt{\lambda}}{m}\partial_x\phi
\end{aligned} \tag{65}$$

と与えられる。そして，全空間で積分すると，

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x\ k^0 &= \frac{\sqrt{\lambda}}{m}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x\ \partial_x\phi \\
&= \frac{\sqrt{\lambda}}{m}\Big[\phi\Big]_{-\infty}^{+\infty} \\
&= \frac{\sqrt{\lambda}}{m}\Big(\phi(+\infty) - \phi(-\infty)\Big)
\end{aligned} \tag{66}$$

となるが，この積分値を Q と定義して，

$$Q = \frac{\sqrt{\lambda}}{m}\Big(\phi(+\infty) - \phi(-\infty)\Big) \tag{67}$$

を**トポロジカルチャージ**と呼ぶ。このトポロジカルチャージは場の配置に課せられた境界条件による保存量であり，トポロジカルセクターで決まる値をとる。キンク解（セクター S1）の場合と反キンク解（セクター S2）の場合は $Q \neq 0$ となり，定数解 $\phi = \pm m/\sqrt{\lambda}$（セクター S3 と S4）の場合には $Q = 0$ となっていることに注意する。前者を**トポロジカルソリトン（解）**，後者を**非トポロジカルソリトン（解）**という。

4. まとめ

非線形波動理論におけるソリトンの定義としては，不変な波を表現し，無限遠方ではある定数に近づくよ

[16] このとき，$\phi(t, \infty)$ も時刻 t に対して滑らかとなる。
[17] つまり時刻 t に対して変化しない状態のこと。
[18] 慣れてくれば具体的に計算しなくても，μ と ν の入れ替えに対して $\epsilon^{\mu\nu}$ が反対称で $\partial_\mu\partial_\nu$ が対称なので，零となるのはすぐに分かる。

うに局所化され，他のソリトン（解）と衝突などの相互作用をしても位相変化以外は変化しないような，非線形微分（差分）方程式の解であるとされる。相対論的な場の理論においては，局所化した有限エネルギーをもつ古典的な場の方程式の解で，摂動に関して安定性を保つ解を，ソリトン（解）と呼ぶ。

この安定性が，トポロジカルチャージの存在によって達成される場合をトポロジカルソリトン（解），ラグラジアン密度の対称性から現れるネーターチャージの存在によって達成される場合を非トポロジカルソリトン（解）と各々呼ばれる。トポロジカルチャージは，系の対称性から現れるネーターチャージのようなものではなく，系の対称性とは**無関係**に存在しているチャージである。

本稿では，空間次元が1次元な場合の相対論的な場の理論におけるソリトンについて紹介した。具体例としては紙面の都合上，Polyakov の ϕ^4 模型のみを取り上げたが，ポテンシャル U を

$$U(\phi) = 1 - \cos\phi \tag{68}$$

としたときの sine-Gordon 模型[19] ：

$$\partial_t^2\phi - \partial_x^2\phi - \sin\phi = 0 \tag{69}$$

も非常に有名な例である。もし，興味をもたれた方は，是非この sine-Gordon 模型で本稿の計算をフォローすることを進める。

ところで，空間次元が 2 次元以上の場合にも同様にソリトンはあるのか？と考えるのは自然である。しかしながら，Derrick の定理[20] というものがあり，この定理によれば，スカラー場を考える限り，静的な有限エネルギーをもつ古典解が存在できるのは空間一次元のときのみである[21] [6], [7]。

最後に，Derrick の定理の結果のみ表にまとめておく [16]：

空間次元	場の種類	解の例
1	スカラー場	ソリトン
2	スカラー場とゲージ場	ヴォルテックス
3	スカラー場とゲージ場	モノポール
4	ゲージ場	インスタントン

[19] 非線形 Klein-Gordon 模型というべき模型である。
[20] その期待を裏切る内容から Derrick のダメ定理 や ソリトンの非存在定理と呼ばれることもある。
[21] しかし，Derrick のダメ定理の前提である「スカラー場という条件」か「静的な」という条件をはずせば，可能性はもちろんある。

謝辞

本研究は，サンパウロ州研究助成基金（FAPESP），富山県立大学「平成 21 年度 教養教育特別研究経費-継続-」・「平成 21 年度 特別研究費-奨励研究（萌芽的研究）」からサポートを受けて行われていることを附記する。

著者の一人（KT）は以下の三氏：
森山 信彦氏（フルハルター），吉宗 史博氏（Pen and message.）そして　和田 哲哉氏（信頼文具舗）
の各氏に，いつも使い易い文具を提供してくれていることを感謝する.

最後に，研究のためとはいえ，頻繁に自宅を留守にすることをいつも寛容に認めてくれる（互いの）家族に感謝する.

補足： 双曲線関数について

双曲線関数と指数関数の関係をまとめておく：

$$\begin{aligned}
\sinh x &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{e^{2x}-1}{2e^x} = \frac{1-e^{-2x}}{2e^{-x}} \\
\cosh x &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{e^{2x}+1}{2e^x} = \frac{1+e^{-2x}}{2e^{-x}} \\
\tanh x &= \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} = \frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}} \\
\mathrm{sech}\ x &= \frac{1}{\cosh x} = \frac{2}{e^x + e^{-x}} \\
\mathrm{cosech}\ x &= \frac{1}{\sinh x} = \frac{2}{e^x - e^{-x}} \\
\coth x &= \frac{1}{\tanh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}
\end{aligned}$$

これを用いれば，微分・積分・極限の計算 や さまざまな恒等式を求めることができる。

参考文献

[1] 戸田盛和 (2000)：
非線形波動とソリトン,
ISBN: 978-4535783164.

[2] 和達三樹 (2000)：
非線形波動,
ISBN: 978-4000067416.

[3] T. D. Lee(1981)：
Particle Physics and Introduction to Field Theory, **ISBN: 978-3718600328**.

[4] T.-P. Cheng and L.-F. Li(1988)：
Gauge Theory of Elementary Particle Physics,
ISBN: 978-0198519614.

[5] T.-P. Cheng and L.-F. Li(2000)：
Gauge Theory of Elementary Particle Physics: Problems and Solutions,
ISBN: 978-0198506218.

[6] R. Rajaraman(1987)：
Solitons and Instantons,
ISBN: 978-0444870476.

[7] N. Manton, P. Sutcliffe(2004)：
Topological Solitons,
ISBN: 978-0521838368.

[8] 荒船次郎 (1985)：
素粒子物理におけるソリトン,
別冊『数理科学』 ソリトン, pp.85-pp.89.

[9] J. C. Baez and J. P. Muniain(1994)：
Gauge Fields, Knots, and Gravity,
ISBN: 978-9810220341.

[10] Y. Yang(2001)：
Solitons in Field Theory and Nonlinear Analysis, **ISBN: 978-0387952420**.

[11] V. Belinski and E. Verdaguer(2001)：
Gravitational Solitons,
ISBN: 978-0521805865.

[12] M. Shifman and A. Yung(2009)：
Supersymmetric Solitons,
ISBN: 978-0521516389.

[13] 高橋康, 表實 (2006)：
古典場から量子場への道,
ISBN: 978-4061532601.

[14] 近藤慶一 (2006)：
ゲージ場の量子論入門,
ISBN: 4910054700169.

[15] A. Das (2006)：
Field Theory: A Path Integral Approach,
ISBN: 978-9812568489.

[16] 和達三樹 (1985)：
場の理論におけるソリトン,
別冊『数理科学』 ソリトン, pp.116-pp.121.

On the road to solitons in gauge theories

L. A. FERREIRA * , N. SAWADO † and K. TODA ‡

Summary

We briefly review **solitons**, which are localized solutions to field equations in gauge theories.

Key Words: *gauge theories*, *topological solitons*, *integrability*

*Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo
†Department of Physics, Faculty of science and engineering, the Tokyo University of Science
‡Department of Liberal Arts and Sciences, Faculty of Engineering, Toyama Prefectural University