

# 勾配型ドリフト項を持つ1次元確率微分方程式 に対する散逸性を保持する差分スキーム

石森 勇次  
(工学部教養教育)

勾配型ドリフト項を持つ1次元自励系のストラトノヴィチ型確率微分方程式に対して、ドリフト項の散逸性を保つような差分スキームを提案する。系の散逸性の構造を保つことにより、数値的安定性が既存の差分スキームであるミルスタイン法やホイン法に比べて改善されることを示す。なお、提案する差分スキームは伊藤型確率微分方程式に対しても適用可能である。

キーワード：1次元確率微分方程式、勾配型ドリフト項、散逸性、構造保存計算法、数値的安定性

## 1. はじめに

1次元自励系のストラトノヴィチ型確率微分方程式 (SSDE)

$$dX_t = a(X_t)dt + b(X_t) \circ dW_t \quad (1)$$

を考える [1,2]。(1) 式の右辺第1項はドリフト項で第2項は拡散項であり、 $W_t$  ( $t \geq 0$ ) は次の性質を満たす1次元標準ウィナー過程である：

- (1)  $P(W_0 = 0) = 1$  (2)
- (2)  $E(W_t) = 0$  (3)
- (3)  $E(W_t W_s) = \min(t, s)$  (4)
- (4)  $E(W_t - W_s) = 0$  ( $0 \leq s \leq t$ ) (5)
- (5)  $E((W_t - W_s)^2) = t - s$  ( $0 \leq s \leq t$ ) (6)
- (6)  $E((W_t - W_s)(W_v - W_u)) = 0$  (7)
- (7) ( $0 \leq s \leq t \leq u \leq v$ ) (8)

ここで、 $P$  は確率、 $E$  は期待値を表す。 $W_t - W_s$  ( $0 \leq s \leq t$ ) は平均が0、分散が  $t - s$  の正規分布  $N(0; t - s)$  に従う。

本論文では特に  $a(X_t)$  がエネルギー関数  $V(X_t)$  の勾配で表される、即ち

$$a(X_t) = -V'(X_t) \quad (9)$$

の場合に限定する。このとき、ドリフト項は散逸性を表す項となる。もし拡散項  $b(X_t) = 0$  であれば、散逸性

$$dV(X_t) = V'(X_t)dX_t = -V'(X_t)^2 dt \leq 0 \quad (10)$$

が成り立つ。なお、伊藤型確率微分方程式 (ISDE)

$$dX_t = a(X_t)dt + b(X_t)dW_t \quad (11)$$

は SSDE

$$dX_t = \left\{ a(X_t) - \frac{1}{2}b'(X_t)b(X_t) \right\} dt + b(X_t) \circ dW_t \quad (12)$$

と等価であるから、勾配型ドリフト項を持つ ISDE

$$dX_t = -V'(X_t)dt + b(X_t)dW_t \quad (13)$$

と勾配型ドリフト項を持つ SSDE

$$dX_t = -U'(X_t)dt + b(X_t) \circ dW_t \quad (14)$$

$$U(X_t) = V(X_t) + \frac{1}{4}b(X_t)^2 \quad (15)$$

は等価となり、両者とも散逸性を持つ方程式となる。従って以下で提案する SSDE に対する差分スキームは ISDE に対しても適用可能である。なお、SSDE では ISDE と異なり通常の微分積分の公式がそのまま成り立つので、厳密解等を扱いやすく (厳密解の例は付録 A を参照) 差分スキームの構成や数値解と厳密解の比較に都合がよい。

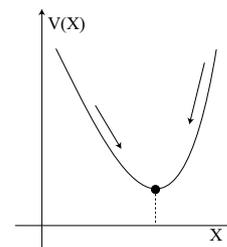


図1 エネルギー散逸性

本論文では, SSDE を数値的に解くための差分スキームを, 近年盛んに研究されている構造保存数値解法 [3,4] の視点で考え, 新しいスキームを提案する. 構造保存数値解法は微分方程式の持つ何らかの構造を保持する解法で, 安定性の面で汎用計算法より優れている場合がある. ここではドリフト項の散逸性 (10) を保持する解法を考え, 数値解の安定性がより改善されることを試みる.

## 2. 差分スキーム

### 2.1 SSDE の積分表示

刻み幅を  $\Delta t$  とし, 離散時間

$$t^k = k\Delta t \quad (16)$$

$$k = 0, 1, 2, \dots \quad (17)$$

での  $X_{t^k}$  の数値解を  $X^k$  と表す. 微分方程式 (1) を区間  $[t^k, t^{k+1}]$  で積分すると, 積分表示

$$X_{t^{k+1}} = X_{t^k} + \int_{t^k}^{t^{k+1}} a(X_t)dt + \int_{t^k}^{t^{k+1}} b(X_t) \circ dW_t \quad (18)$$

を得る. 積分表示 (18) の右辺の積分をどのように近似するのかによって, さまざまな差分スキーム

$$X^{k+1} = X^k + \boxed{?} \quad (19)$$

を構成することができる.

SSDE では確率積分が対称である (付録 B 参照) ことを考慮して拡散項に対して対称な差分スキーム (陰的スキーム) を考えることがよさそうであるが, これは危険であることを指摘しておく [2]. 例えば

$$a(X_t) = 0, \quad b(X_t) = X_t \quad (20)$$

のとき, 積分表示

$$X_{t^{k+1}} = X_{t^k} + \int_{t^k}^{t^{k+1}} X_t \circ dW_t \quad (21)$$

に対して, 対称な差分スキーム

$$X^{k+1} = X^k + \frac{X^k + X^{k+1}}{2} \Delta W^k \quad (22)$$

$$\Delta W^k = W^{k+1} - W^k = \xi^k \sqrt{\Delta t} \quad (23)$$

$$\xi^k (k = 0, 1, 2, \dots) : N(0; 1) \text{ 標準正規乱数} \quad (24)$$

を考えると,

$$X^{k+1} = \frac{1 + \frac{\sqrt{\Delta t}}{2} \xi^k}{1 - \frac{\sqrt{\Delta t}}{2} \xi^k} X^k \quad (25)$$

となり, 0 除算の可能性がある. さらに, 期待値の発散

$$\begin{aligned} & E \left( \left| \frac{1 + \frac{\sqrt{\Delta t}}{2} \xi^k}{1 - \frac{\sqrt{\Delta t}}{2} \xi^k} \right|^p \right) \quad (p \geq 1) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{1 + \frac{\sqrt{\Delta t}}{2} u}{1 - \frac{\sqrt{\Delta t}}{2} u} \right|^p \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du \\ &= \infty \end{aligned} \quad (26)$$

が起きる.

### 2.2 差分スキーム

勾配型ドリフト項 (9) を持つ SSDE (1) に対して, 次の 2 種類の陰的差分スキームを提案する.

スキーム 1 :

$$\begin{aligned} X^{k+1} &= X^k - \delta_x^{1,0} V^k \Delta t \\ &\quad + b(X^k) \Delta W^k + \frac{1}{2} b(X^k) b'(X^k) (\Delta W^k)^2 \end{aligned} \quad (27)$$

スキーム 2 :

$$\begin{aligned} X^{k+1} &= X^k - \delta_x^{1,0} V^k \Delta t \\ &\quad + \frac{1}{2} \{ b(X^k) + b(\bar{X}^{k+1}) \} \Delta W^k \end{aligned} \quad (28)$$

$$\bar{X}^{k+1} = X^k - V'(X^k) \Delta t + b(X^k) \Delta W^k \quad (29)$$

ここで  $\delta_x^{1,0} V^k$  は

$$\delta_x^{1,0} V^k = \frac{V(X^{k+1}) - V(X^k)}{X^{k+1} - X^k} \quad (30)$$

で定義される離散勾配を表す. どちらのスキームも  $b(X) = 0$  のとき, 連続時間系の散逸性 (10) に対応する離散散逸性

$$\begin{aligned} & V(X^{k+1}) - V(X^k) \\ &= \frac{V(X^{k+1}) - V(X^k)}{X^{k+1} - X^k} (X^{k+1} - X^k) \\ &= \delta_x^{1,0} V^k \cdot (-\delta_x^{1,0} V^k \Delta t) \\ &= -(\delta_x^{1,0} V^k)^2 \Delta t \leq 0 \end{aligned} \quad (31)$$

が成り立つ.

上記のスキームではドリフト項は陰的ではあるが, 拡散項は代表的な陽的スキームを借用している. これは期待値の発散を避けるためである. スキーム 1 では, ミルスタイン法:

$$\begin{aligned} X^{k+1} &= X^k + a(X^k) \Delta t \\ &\quad + b(X^k) \Delta W^k + \frac{1}{2} b(X^k) b'(X^k) (\Delta W^k)^2 \end{aligned} \quad (32)$$

の拡散項と同じ式を用い、スキーム2では、ホイン法：

$$X^{k+1} = X^k + \frac{1}{2} \left\{ a(X^k) + a(\bar{X}^{k+1}) \right\} \Delta t + \frac{1}{2} \left\{ b(X^k) + b(\bar{X}^{k+1}) \right\} \Delta W^k \quad (33)$$

$$\bar{X}^{k+1} = X^k + a(X^k) \Delta t + b(X^k) \Delta W^k \quad (34)$$

の拡散項と同じ式を用いている。このため、精度としてどのスキームもミルスタイン法やホイン法と同じテイラー展開の1次まで正しい計算法となっている（付録C参照）。

### 3. 数値的安定性

#### 3.1 テスト方程式と厳密解および数値解

例として

$$a(X_t) = -\alpha X_t, \quad b(X_t) = \beta X_t \quad (\alpha, \beta > 0) \quad (35)$$

の場合、即ち線形のSSDE

$$dX_t = -\alpha X_t dt + \beta X_t \circ dW_t \quad (36)$$

を考える。この場合、エネルギー関数は

$$V(X) = \frac{1}{2} \alpha X^2 \quad (37)$$

で与えられ、 $X = 0$  で最小値をとる。

SSDE (36) の区間  $[t^k, t^{k+1}]$  での解析解は

$$X_{t^{k+1}} = \exp\{-\alpha \Delta t + \beta \cdot (W_{t^{k+1}} - W_{t^k})\} X_{t^k} \quad (38)$$

で与えられる。したがって、離散時間における近似ウィナー過程  $W^k$  を用いて実現される数値解、即ち実現解は

$$X^{k+1} = R^k X^k \quad (39)$$

の形で表すと

$$R^k = \exp(-\alpha \Delta t + \beta W^k) \quad (40)$$

となる。

各スキームも (39) の形で表され、それぞれ次のようになる。

スキーム1：

$$R^k = \frac{1 - \frac{1}{2} \alpha \Delta t + \beta \Delta W^k + \frac{1}{2} \beta^2 (\Delta W^k)^2}{1 + \frac{1}{2} \alpha \Delta t} \quad (41)$$

スキーム2：

$$R^k = \frac{\left(1 - \frac{1}{2} \alpha \Delta t\right) (1 + \beta \Delta W^k) + \frac{1}{2} \beta^2 (\Delta W^k)^2}{1 + \frac{1}{2} \alpha \Delta t} \quad (42)$$

ミルスタイン法：

$$R^k = 1 - \alpha \Delta t + \beta \Delta W^k + \frac{1}{2} \beta^2 (\Delta W^k)^2 \quad (43)$$

ホイン法：

$$R^k = (1 - \alpha \Delta t) (1 + \beta W^k) + \frac{1}{2} \alpha^2 \Delta t^2 + \frac{1}{2} \beta^2 (\Delta W^k)^2 \quad (44)$$

#### 3.2 平均2乗漸近安定性

数値解の安定性を調べるため、漸近安定性

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(|X^n|) = 0 \quad (45)$$

が成り立つかどうかを考える [2,5]。漸近安定であるためには  $R^k$  に対する平均2乗漸近安定性の条件

$$E((R^k)^2) < 1 \quad (46)$$

が成り立てばよい（十分条件：付録D参照）。

$$p = \alpha \Delta t, \quad q = \beta^2 \Delta t \quad (47)$$

とおき、 $pq$  平面上（ただし、 $p, q > 0$ ）での安定領域、即ち不等式 (46) が成り立つ領域を考える。

実現解 (40) では

$$\begin{aligned} E((R^k)^2) &= E(\exp(-2p + 2\sqrt{q}\xi^k)) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-2p + 2\sqrt{q}u - \frac{u^2}{2}\right) du \\ &= \exp(-2p + 2q) \\ &\times \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2}(u - 2\sqrt{q})^2\right\} du \\ &= \exp(-2p + 2q) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{v^2}{2}\right) dv \\ &= \exp(-2p + 2q) < 1 \end{aligned} \quad (48)$$

より、安定領域を表す不等式は

$$q < p \quad (49)$$

となる。即ち、直線  $q = p$  と  $p$  軸で挟まれた領域（境界線を含まない）が安定領域となる。

各計算スキームの  $R^k$  は一般に

$$R^k = A(p, q) + B(p, q)\xi^k + C(p, q)(\xi^k)^2 \quad (50)$$

の形をしている。 $A(p, q)$ ,  $B(p, q)$ ,  $C(p, q)$  はそれぞれ次の式で与えられる。

スキーム 1 :

$$A(p, q) = \frac{1 - \frac{p}{2}}{1 + \frac{p}{2}} \quad (51)$$

$$B(p, q) = \frac{\sqrt{q}}{1 + \frac{p}{2}} \quad (52)$$

$$C(p, q) = \frac{\frac{q}{2}}{1 + \frac{p}{2}} \quad (53)$$

スキーム 2 :

$$A(p, q) = \frac{1 - \frac{p}{2}}{1 + \frac{p}{2}} \quad (54)$$

$$B(p, q) = \frac{\left(1 - \frac{p}{2}\right) \sqrt{q}}{1 + \frac{p}{2}} \quad (55)$$

$$C(p, q) = \frac{\frac{q}{2}}{1 + \frac{p}{2}} \quad (56)$$

ミルスタイン法 :

$$A(p, q) = 1 - p \quad (57)$$

$$B(p, q) = \sqrt{q} \quad (58)$$

$$C(p, q) = \frac{q}{2} \quad (59)$$

ホイン法 :

$$A(p, q) = 1 - p + \frac{p^2}{2} \quad (60)$$

$$B(p, q) = (1 - p)\sqrt{q} \quad (61)$$

$$C(p, q) = \frac{q}{2} \quad (62)$$

安定性の条件 (46) は

$$\begin{aligned} E((R^k)^2) &= E(A(p, q)^2 + 2A(p, q)B(p, q)\xi^k \\ &+ B(p, q)^2(\xi^k)^2 + 2A(p, q)C(p, q)(\xi^k)^2 \\ &+ 2B(p, q)C(p, q)(\xi^k)^3 + C(p, q)^2(\xi^k)^4) \\ &= A(p, q)^2 + B(p, q)^2 \\ &+ 2A(p, q)C(p, q) + 3C(p, q)^2 \end{aligned} \quad (63)$$

より

$$A(p, q)^2 + B(p, q)^2 + 2A(p, q)C(p, q) + 3C(p, q)^2 < 1 \quad (64)$$

となる。ここで  $n = 1, 2, 3, \dots$  とし

$$E((\xi^k)^{2n-1}) = 0 \quad (65)$$

$$E((\xi^k)^{2n}) = (2n - 1)(2n - 3) \cdots 3 \cdot 1 \quad (66)$$

を用いた。

図 2 に各スキームの安定領域の境界線を示した。境界線と  $p$  軸で挟まれた領域が安定領域である。比較のため、厳密解 (実現解), ミルスタイン法, ホイン法の境界線も示した。スキーム 1, スキーム 2 ともミルスタイン法やホイン法に比べて広い安定領域を持つことがわかる。スキーム 2 は  $p < 4$  においてスキーム 1 より広い安定領域を持つが, 厳密解の境界線より上の領域, 即ち本来不安定な領域において安定となっている部分がある。 $p > 4$  では, スキーム 1 がスキーム 2 より広い安定領域を持つ。

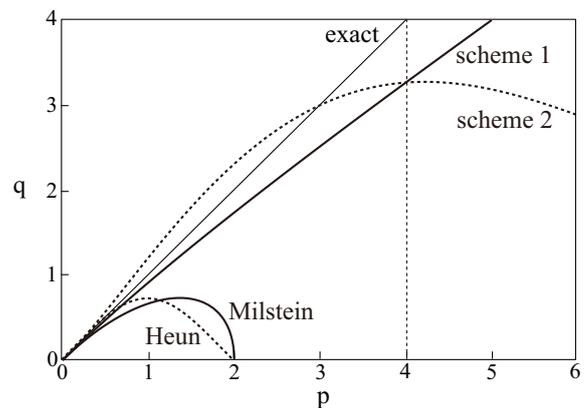


図 2 安定領域の境界線

なお, 各スキームの境界線は次のように表される (付録 E 参照)。

スキーム 1 :

$$q = \frac{8 + 2q}{8 + 3q} p \rightarrow \begin{cases} q \approx p & (p \ll 1) \\ q \approx \frac{2}{3} p & (p \gg 1) \end{cases} \quad (67)$$

スキーム 2 :

$$q = \frac{8 + 6q}{8 + 3q + p^2} p \rightarrow \begin{cases} q \approx p & (p \ll 1) \\ q \approx \frac{8}{p} & (p \gg 1) \end{cases} \quad (68)$$

どちらも  $p$  が十分小さければ厳密解と同じ境界線となる。一方  $p$  が大きくなるにつれ, スキーム 1 では無限に安定領域が広がっているが, スキーム 2 では安定領域が小さくなっていく。

## 4. おわりに

本研究では 1 次元確率微分方程式に対して, 散逸性を保持する差分スキームを提案した。テスト方程式として線形の乗法的ノイズを持つ方程式を取り上げ, その数値的安定性を調べた。散逸性を保持することにより, 既存

の方法であるミルスタイン法やホイン法に比べて広い安定領域を持つことが示された。今後の課題として

- (1) 非線形テスト方程式の安定性解析
- (2) 2次元以上の確率微分方程式に対する構造保存差分スキームの構成
- (3) 高次の構造保存差分スキームの構成
- (4) 拡散項が対称な差分スキームの構成が考えられる。

### 参考文献

- [1] P.E.Kloeden and E.Platen : *Numerical Solution of Stochastic Differential Equations*, Springer-Verlag, Berlin, 1992.
- [2] E.Platen and N.Bruti-Liberati : *Numerical Solution of Stochastic Differential Equations with Jumps in Finance*, Springer-Verlag, Berlin, 2010.
- [3] E. Hairer, C. Lubich and G. Wanner: *Geometric Numerical Integration, Structure-Preserving Algorithms for Ordinary Differential Equations* (Springer, Berlin, 2006)2nd ed..
- [4] 松尾宇泰, 宮武勇登 : 微分方程式に対する構造保存数値解法, 日本応用数学会論文誌, Vol.22, (2012) 213-251.
- [5] 齊藤善弘 : 確率ホイン法の平均二乗安定性と漸近安定性, 日本応用数学会論文誌, Vol.21, (2011) 125-134.

## 付 録

### 付録 A SSDE の厳密解の例

SSDE の場合, 形式的にはウィナー過程  $W_t$  を普通の時間  $t$  の関数と考えてもよいので,

$$X = X(t) = X_t, W(t) = W_t, \eta(t) = \frac{dW(t)}{dt} \quad (a1)$$

として (1) を通常の微分方程式の形

$$\frac{dX}{dt} = a(X) + b(X)\eta(t) \quad (a2)$$

に書きかえる。

例 1  $a(X)$  と  $b(X)$  が比例 (乗法的ノイズ) :

$$a(X) = \lambda f(X), b(X) = \mu f(X) \quad (a3)$$

のとき, 微分方程式は

$$\frac{dX}{dt} = (\lambda + \mu\eta(t)) f(X) \quad (a4)$$

となるので

$$\int_{X_0}^{X_t} \frac{dX}{f(X)} = \int_0^t (\lambda + \mu\eta(s)) ds = \lambda t + \mu W(t) \quad (a5)$$

である。従って

$$g(X) = \int \frac{dX}{f(X)} \quad (a6)$$

とおけば

$$g(X_t) - g(X_0) = \lambda t + \mu W_t \quad (a7)$$

より, 厳密解

$$X_t = g^{-1}(g(X_0) + \lambda t + \mu W_t) \quad (a8)$$

を得る。例えば  $f(X) = X$  のとき,

$$X_t = X_0 \exp(\lambda t + \mu W_t) \quad (a9)$$

である。また  $f(X) = 2\sqrt{X}$  のとき,

$$X_t = \left( \sqrt{X_0} + \lambda t + \mu W_t \right)^2 \quad (a10)$$

である。

例 2 ランジュバン方程式 (加法的ノイズ) :

$$a(X) = \lambda X, b(X) = \mu \quad (a11)$$

のとき, 微分方程式は

$$\frac{dX}{dt} = \lambda X + \mu\eta(t) \quad (a12)$$

となる。ここで  $X = \exp(\lambda t)Y(t)$  とおけば

$$\frac{dY}{dt} = \mu \exp(-\lambda t)\eta(t) = \mu \exp(-\lambda t) \frac{dW}{dt} \quad (a13)$$

より

$$Y(t) = Y(0) + \mu \int_0^t \exp(-\lambda s) \frac{dW}{ds} ds \quad (a14)$$

となるので, 積分形の厳密解

$$X_t = X_0 \exp(\lambda t) + \mu \exp(\lambda t) \int_0^t \exp(-\lambda s) dW_s \quad (a15)$$

を得る。

例 3 確率ロジスティック方程式 :

$$a(X) = \lambda X - X^2, b(X) = \mu X \quad (a16)$$

のとき, 微分方程式は

$$\frac{dX}{dt} = \lambda X - X^2 + \mu\eta(t)X \quad (a17)$$

となる。ここで  $X = \frac{1}{Y(t)}$  とおけば, 線形の方程式

$$\frac{dY}{dt} = -(\lambda + \mu\eta(t))Y + 1 \quad (a18)$$

となるので、 $Y(t)$  は簡単に求めることができ、 $X_t$  に対する積分形の厳密解

$$X_t = \frac{X_0 \exp(\lambda t + \mu W_t)}{1 + X_0 \int_0^t \exp(\lambda s + \mu W_s) ds} \quad (a19)$$

を得る。

### 付録 B 確率積分

伊藤型およびストラトノヴィチ型の確率積分は次のように定義される。

伊藤型：

$$\int_0^t b(X_s) dW_s = \lim_{h \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} b(X_{t^i}) \Delta W^i \quad (b1)$$

ストラトノヴィチ型 (対称積分)：

$$\int_0^t b(X_s) \circ dW_s = \lim_{h \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} b\left(\frac{X_{t^i} + X_{t^{i+1}}}{2}\right) \Delta W^i \quad (b2)$$

ここで

$$t^0 = 0 < t^1 < t^2 < \dots < t^n = t \quad (b3)$$

$$\Delta W^i = W_{t^{i+1}} - W_{t^i} \quad (b4)$$

$$h = \max \{t^{i+1} - t^i\}_{i=0,1,\dots,n-1} \quad (b5)$$

である。

### 付録 C 確率テイラー展開

任意の関数  $f(X_t)$  に対して

$$df(X_t) = \left\{ \frac{d}{dX_t} f(X_t) \right\} dX_t \quad (c1)$$

であるから、SSDE (1) より

$$df(X_t) = a(X_t) \frac{d}{dX_t} f(X_t) dt + b(X_t) \frac{d}{dX_t} f(X_t) \circ dW_t \quad (c2)$$

となる。簡略化のため演算子

$$L_t = a(X_t) \frac{d}{dX_t}, \quad M_t = b(X_t) \frac{d}{dX_t} \quad (c3)$$

を導入すると

$$df(X_t) = L_t f(X_t) dt + M_t f(X_t) \circ dW_t \quad (c4)$$

である。(c4) を区間  $[0, t]$  で積分すると

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t L_s f(X_s) ds + \int_0^t M_s f(X_s) \circ dW_s \quad (c5)$$

を得る。

公式 (c5) で  $f(X_t) = X_t$  とおけば

$$L_s X_s = a(X_s), \quad M_s X_s = b(X_s) \quad (c6)$$

より

$$X_t = X_0 + \int_0^t a(X_s) ds + \int_0^t b(X_s) \circ dW_s \quad (c7)$$

である。 $f(X_s) = a(X_s)$ ,  $f(X_s) = b(X_s)$  として公式 (c5) を適用すると

$$a(X_s) = a(X_0) + \int_0^s L_r a(X_r) dr + \int_0^s M_r a(X_r) \circ dW_r \quad (c8)$$

$$b(X_s) = b(X_0) + \int_0^s L_r b(X_r) dr + \int_0^s M_r b(X_r) \circ dW_r \quad (c9)$$

であるから、(c7) より

$$\begin{aligned} X_t &= X_0 + a(X_0) \int_0^t ds + b(X_0) \int_0^t \circ dW_s \\ &+ \int_0^t \int_0^s L_r a(X_r) dr ds \\ &+ \int_0^t \int_0^s M_r a(X_r) \circ dW_r ds \\ &+ \int_0^t \int_0^s L_r b(X_r) dr \circ dW_s \\ &+ \int_0^t \int_0^s M_r b(X_r) \circ dW_r \circ dW_s \end{aligned} \quad (c10)$$

となる。(c10) において  $t = \Delta t$  とおくと

$$\int_0^{\Delta t} ds = \Delta t \quad (c11)$$

$$\int_0^{\Delta t} \circ dW_s = W_{\Delta t} - W_0 = \Delta W_0 = O(\Delta t^{0.5}) \quad (c12)$$

$$\begin{aligned} &\int_0^{\Delta t} \int_0^s M_r b(X_r) \circ dW_r \circ dW_s \\ &= M_0 b(X_0) \int_0^{\Delta t} \int_0^s \circ dW_r \circ dW_s + O(\Delta t^{1.5}) \\ &= M_0 b(X_0) \int_0^{\Delta t} (W_s - W_0) \circ dW_s + O(\Delta t^{1.5}) \\ &= M_0 b(X_0) \left\{ \frac{1}{2} (W_{\Delta t}^2 - W_0^2) - W_0 (W_{\Delta t} - W_0) \right\} \\ &+ O(\Delta t^{1.5}) \\ &= M_0 b(X_0) \frac{1}{2} (\Delta W_0)^2 + O(\Delta t^{1.5}) \end{aligned} \quad (c13)$$

であり、これら以外の項は  $\Delta t$  の 1.5 次以上となるので

$$X_{\Delta t} = X_0 + a(X_0) \Delta t + b(X_0) \Delta W_0 + \frac{1}{2} b(X_0) b'(X_0) (\Delta W_0)^2 + O(\Delta t^{1.5}) \quad (c14)$$

となる。

**付録 D 漸近安定性と平均 2 乗漸近安定性**

平均 2 乗漸近安定性 (46) が成り立つとき、漸近安定性 (45) が成り立つことを示す。

$$E(|X^n|) \leq \sqrt{E(|X^n|^2)} \quad (d1)$$

に注意する,

$$\begin{aligned} E(|X^n|^2) &= E(|R^{n-1}|^2 |X^{n-1}|^2) \\ &= E(|R^{n-1}|^2) E(|X^{n-1}|^2) \\ &= E(|R^{n-1}|^2) E(|R^{n-2}|^2) \cdots E(|R^0|^2) |X^0|^2 \\ &= (r)^n |X^0|^2 \end{aligned} \quad (d2)$$

となる。ここで

$$\begin{aligned} r &= E(|R^j|^2) \\ j &= 0, 1, \dots, n-1 \end{aligned} \quad (d3)$$

である。従って  $r \geq 0$  に注意すると (d1), (d2) より

$$r = E((R^k)^2) < 1 \quad (d4)$$

のとき, (45) が成り立つ。

**付録 E (68), (69) の導出**

スキーム 1 の  $A(p, q)$ ,  $B(p, q)$ ,  $C(p, q)$  に対する安定条件 (65) は

$$\begin{aligned} \frac{\left(1 - \frac{p}{2}\right)^2 + q + \frac{3}{4}q^2 + \left(1 - \frac{p}{2}\right)q}{\left(1 + \frac{p}{2}\right)^2} &< 1 \\ \left(1 - \frac{p}{2}\right)^2 + q + \frac{3}{4}q^2 + \left(1 - \frac{p}{2}\right)q &< \left(1 + \frac{p}{2}\right)^2 \\ q + \frac{3}{4}q^2 + \left(1 - \frac{p}{2}\right)q &< 2p \\ \left(2 + \frac{3}{4}q\right)q &< \left(2 + \frac{q}{2}\right)p \end{aligned} \quad (e1)$$

のように変形できるので, 不等式

$$q < \frac{8 + 2q}{8 + 3q}p \quad (e2)$$

を得る。一方, スキーム 2 の  $A(p, q)$ ,  $B(p, q)$ ,  $C(p, q)$  に対する安定条件 (65) は

$$\frac{\left(1 - \frac{p}{2}\right)^2 + \left(1 - \frac{p}{2}\right)^2 q + \frac{3}{4}q^2 + \left(1 - \frac{p}{2}\right)q}{\left(1 + \frac{p}{2}\right)^2} < 1$$

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{p}{2}\right)^2 + \left(1 - \frac{p}{2}\right)^2 q + \frac{3}{4}q^2 + \left(1 - \frac{p}{2}\right)q \\ < \left(1 + \frac{p}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

$$\left(1 - p + \frac{p^2}{4}\right)q + \frac{3}{4}q^2 + \left(1 - \frac{p}{2}\right)q < 2p \quad (e3)$$

$$\left(2 + \frac{3}{4}q + \frac{p^2}{4}\right)q < \left(2 + \frac{3}{2}q\right)p$$

のように変形できるので, 不等式

$$q < \frac{8 + 6q}{8 + 3q + p^2}p \quad (e4)$$

を得る。それぞれ境界では不等号が等号となり (68), (69) を得る。

# Numerical Stability of Difference Schemes with the Discrete-Gradient Drift-Term for the One-Dimensional Stochastic Differential Equations

Yuji ISHIMORI

Department of Liberal Arts and Sciences, Faculty of Engineering

## Summary

We propose implicit difference schemes which maintain dissipative property for the one-dimensional stochastic differential equations. We show that asymptotic stability of the proposed schemes are better than that of Milstein and Heun schemes.

*Key Words:* Stratonovich stochastic differential equations, gradient drift term, numerical integration, energy dissipation, numerical stability, structure-preserving methods