平面波を初期値とする時間依存型消散項付き
非線型分散型方程式について

土井　一幸
(工学部教養教育)

本稿では, 平面波を重ね合わせたものを初期値とする消散項付きの非線型分散型方程式について考察する. ここで, 消散項の係数として (定数関数も含めて) 時間に依存するものを扱う. 本稿の目的は, 非線型項と消散項がどのようにして解の振る舞いに影響を与えるかを解析することである. 特に, 非線型項が解を不安定にするような効果を持つ場合に, 消散項が解の不安定化を阻止するための十分条件を考察する.

キーワード: 非線型分散型方程式, 時間依存型消散項, 平面波, 大域解, 爆発解

1. 序

次のような非線型発展方程式を考える:

$$\text{(1)} \qquad \partial_t u + \mathcal{L}u = \lambda \mathcal{N}(u) \quad \text{in } (0,\infty)\times \mathbf{R}^n,$$

ただし $n \geq 1$, $\partial_t = \partial/\partial t$, $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2 \in \mathbf{C}\setminus\{0\}$ (λ_1, $\lambda_2 \in \mathbf{R}$), $i=\sqrt{-1}$ とし, 未知関数 $u = u(t,x)$ は複素数値であるとする. また, 線型微分作用素 $\mathcal{L}$: $\mathcal{S}' \to \mathcal{S}'$ は各 $t>0$ に応じて

$$\mathcal{L}u = \mathcal{F}^{-1}[P(t,\xi)\mathcal{F}[u](\xi)], \quad u \in \mathcal{S}'$$

と定める, ただし, $\mathcal{S}' = \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$ は $\mathbf{R}^n$ 上の緩増加超関数全体からなる空間とし, $\mathcal{F}$ は $\mathcal{S}'$ 上のフーリエ変換, $P(t,\cdot)$ は緩増加関数 (すなわち, $P(t,\cdot) \in C^\infty(\mathbf{R}^n_\xi)$ であり, 任意の多重指数 $\alpha \in \mathbf{Z}^n_+$ に対してある $N(\alpha) \in \mathbf{Z}_+$ が存在して

$$\sup_{\xi\in\mathbf{R}^n} (1+|\xi|)^{-N(\alpha)} |\partial^\alpha_\xi P(t,\xi)| < \infty$$

となるもの) とする. 上で定めた $\mathcal{L}$ の典型例として, 次のようなものが挙げられる: d: $(0,\infty) \to \mathbf{R}$ として

$$\text{(2)} \qquad P(t,\xi) = d(t) + i|\xi|^2,$$

$$\text{(3)} \qquad P(t,\xi) = d(t) - i\xi^3 \quad (n=1).$$

(2), (3) に対する $\mathcal{L}$ はそれぞれシュレディンガー型 ($\mathcal{L} = -i\Delta + d(t) = -i\sum_{k=1}^n \partial^2/\partial x_k^2 + d(t)$), エアリー型 ($\mathcal{L} = \partial_x^3 + d(t)$) の作用素である. 本稿ではこの例 (2), (3) のような方程式に分散性を与える $\mathcal{L}$ (すなわち P) を考える. さらに $\mathcal{N}(u)$ は次のような非線型項と仮定する:

$$\mathcal{N}(u) = |u|^{p-1}u, \quad p > 1.$$

この非線型項はゲージ不変性と呼ばれる次の性質

$$\mathcal{N}(e^{i\theta}z) = e^{i\theta}\mathcal{N}(z), \quad z \in \mathbf{C}, \theta \in \mathbf{R}$$

を持つ.

方程式 (1) は様々な物理現象に対するモデル方程式を含むが, 特に $n=1, p=3$, P を (2) として $d(t)$ が正値の定数関数であるときに, 非線型光学においてファイバー内の光パルスの伝播を記述する基本方程式として現れる [1], [2]. なお, その文脈においては t が光ファイバーに沿った位置を, x $(=x_1)$ が時刻を表す変数であるが, 本稿では t で時刻を, x で位置を表すこととする. ここで, d が正値の定数関数であるとき d は減衰定数を表し, ファイバー損失と呼ばれている. 実際に, 線型項 du は解を減衰させる効果を持ち, この項は消散項と呼ばれている. この場合の (1) について, 多くの研究がある (例えば [5], [6], [7], [9], [10], [14], [15], [16] など). ここで, d が時刻 t に依存していたとしても, 方程式 (1) における線型項 $d(t)u$ は (ある程度の条件を満たせば) 解に消散性を与えるため, これも (時間依存型の) 消散項と呼ぶことにする.

さて本稿では, 初期値として平面波 (あるいはそれらの重ね合わせ) を与えたときの方程式 (1) の解の振る舞いについて考察する. 具体的には, $a \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\}$ として次の初期値

$$u(0,x) = \sum_{j\in\mathbf{Z}} \mu_j E_{ja}(x) \quad \text{for } x \in \mathbf{R}^n \tag{4}$$

を与える, ただし, $b \in \mathbf{R}^n$ に対して $E_b(x) = e^{ib\cdot x}$ $(x \in \mathbf{R}^n)$, $\{\mu_j\}_{j\in\mathbf{Z}} \subset \mathbf{C}$ とする. ここで,

$$\{\mu_j\}_{j\in\mathbf{Z}} \in \ell_1^2 \tag{5}$$

を仮定する, ただし, $\alpha \in \mathbf{R}$ に対して (複素) 数列空間 ℓ_α^2 を次で定義した:

$$\ell_\alpha^2 := \big\{\{A_j\}_{j\in\mathbf{Z}} \subset \mathbf{C}\,;\, \|\{A_j\}_{j\in\mathbf{Z}}\|_{\ell_\alpha^2} < \infty\big\},$$
$$\|\{A_j\}_{j\in\mathbf{Z}}\|_{\ell_\alpha^2} := \Big(\sum_{j\in\mathbf{Z}}(1+|j|^2)^\alpha |A_j|^2\Big)^{1/2}.$$

なお, 記号の煩雑さを避けるため, 以下では $\{A_j\}_{j\in\mathbf{Z}}$ を $\{A_j\}$ と略記する.

このような定式化は, 空間の各成分について 1-周期を持つ滑らかさの低い初期値に対する非線型分散型方程式を考察した Bourgain [3, 4] の研究に関連がある. それは, 本稿で与えられる初期値 (4) が $(2\pi/|a|^2)a \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\}$ 方向に 1-周期を持っていることによる. 著者は [7] において, 本稿での問題を P が時間変数 t に依らない場合について考察した. その場合には初期値の滑らかさを (5) という形で要請した上で, (1)–(4) は後述の (12) という形で表現される (超関数の意味での) 解を持つことが得られた. またその表現に基づいて解の時間大域的な振る舞いも考察した.

このような背景を踏まえ, 本稿の目的は, [7] での問題を P について時間変数 t を付すことにより一般化し, それによって解の時間大域的性質がどのように変わるかを考察することである. このような一般化は, デルタ関数 (の重ね合わせ) を初期値とする非線型シュレディンガー方程式について考察されている [8]. そこで得られた結果は, 非線型項が解を不安定にするような場合に, d が定数関数でなくとも初期値が d に応じて小さければ解を安定化できるというものである. 本稿では, 初期値が平面波の重ね合わせであっても同じように, 非線型項が解を不安定にする場合にも d に応じて初期値を小さく取れば解を安定化できることを示す. なお, 時間依存する d の具体例についても第 3.1 節にて紹介する.

2. 記号

さて, 上の問題に対する結果を述べるために, いくつかの記号を定義する.

まず, 局所解の存在性 (命題 1) を述べるために必要な記号を用意する. $b \in \mathbf{R}^n$ に対して, $U_b = U_b^P(t,x)$ を次の問題の解とする:

$$\begin{cases} \partial_t u + \mathcal{L}u = 0 & \text{in } (0,\infty)\times\mathbf{R}^n, \\ u(0,x) = E_b(x) & \text{for } x \in \mathbf{R}^n. \end{cases}$$

この解 U_b は, 次の関係式

$$\mathcal{L}E_b = P(t,b)E_b \quad \text{in } \mathcal{S}'$$

を用いることで,

$$\begin{aligned} U_b(t,x) &= \exp\Big(-\int_0^t P(s,b)\,ds\Big)E_b(x) \\ &= \exp\Big(-\int_0^t \mathrm{Re}P(s,b)\,ds\Big) \\ &\qquad \times \exp\Big(i\Big(b\cdot x - \int_0^t \mathrm{Im}P(s,b)\,ds\Big)\Big) \end{aligned}$$

であることがわかる. ここで P について, 次を仮定する:

(6)　ある $d \in L^1_{\mathrm{loc}}([0,\infty),\mathbf{R})$ が存在し, 任意の $j \in \mathbf{Z}$ 及びほとんど全ての $t > 0$ に対して $\mathrm{Re}P(t,ja) = d(t)$ となる.

(2) や (3) は ($d \in L^1_{\mathrm{loc}}([0,\infty),\mathbf{R})$ とすれば) 条件 (6) を満足することに注意する. この仮定 (6) のもとで, さらに $p > 1$ に対して関数 $f\colon [0,\infty) \to (0,\infty)$ を

$$f(t) := \exp\Big(-(p-1)\int_0^t d(s)\,ds\Big) \tag{7}$$

と定める.

次に, 主結果である解の時間大域性 (定理 2) を述べるために必要な記号を用意する. $\mathbf{T} = \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$ とする. $1 \le q \le \infty$ に対して $\mathbf{T}$ 上のルベーグ空間 $L^q = L^q(\mathbf{T})$ を $L^q := \{g\colon \mathbf{T} \to \mathbf{C}\,;\, g$ は可測で $\|g\|_{L^q} < \infty\}$ とし, そのノルムを

$$\|g\|_{L^q} := \begin{cases} \Big(\displaystyle\int_0^{2\pi} |g(\theta)|^q\,d\theta\Big)^{1/q} & (1 \le q < \infty), \\ \operatorname*{ess.sup}_{\theta\in\mathbf{T}} |g(\theta)| & (q = \infty) \end{cases}$$

により定める. $g, h \in L^2$ に対して

$$\langle g,h\rangle_\theta = \int_0^{2\pi} g(\theta)\overline{h(\theta)}\,d\theta$$

と定める, ただし $\overline{h(\theta)}$ は $h(\theta)$ の複素共役を表すものとする. また, $\mathbf{T}$ 上のソボレフ空間 $H^1 = H^1(\mathbf{T})$ を $H^1 = \{g(\theta) \in L^2; \|g\|_{H^1} < \infty\}$ とし, そのノルムを $\|g\|_{H^1} = \|\{C_j\}\|_{\ell_1^2}$ により定める, ここで $C_j = (2\pi)^{-1/2}\int_0^{2\pi} g(\theta)e^{-ij\theta}\,d\theta$ とした. さらに本稿の冒頭において (1) の非線型項の係数 λ の実部及び虚部をそれぞれ λ_1, λ_2 と表したことを思い出す, すなわち $\lambda_1 = \mathrm{Re}\lambda$, $\lambda_2 = \mathrm{Im}\lambda$. これらの関数空間を用いて, $\lambda_1 > 0$, $\int_0^\infty f(t)\,dt < \infty$ という仮定のもとで次の正定数を用意する:

$$(8)\qquad \begin{cases} C_0 := C_1 + C_2, \\ C_1 := \lambda_1 \gamma_{p+1}^{p+1}, \\ C_2 := p|\lambda|\gamma_\infty^{p-1}. \end{cases}$$

ここで, $\gamma_{p+1}, \gamma_\infty$ はガリアルド・ニレンベルグの不等式の最良定数とした, すなわち次の不等式を満たす最小の正定数 C のことである: 任意の $v \in H^1(\mathbf{T})$ に対して

$$(9)\quad \|v\|_{L^{p+1}} \le C\|v\|_{L^2}^{(p+3)/(2(p+1))}\|v\|_{H^1}^{(p-1)/(2(p+1))} \qquad (1 \le p < \infty),$$

$$(10)\quad \|v\|_{L^\infty} \le C\|v\|_{L^2}^{1/2}\|v\|_{H^1}^{1/2}.$$

さらに, $\varepsilon_0, \varepsilon_1 > 0$ を次で定める:

$$(11)\quad \begin{aligned} \varepsilon_0 &:= \Big((p-1)\lambda_1\int_0^\infty f(t)\,dt\Big)^{-1/(p-1)}, \\ \varepsilon_1 &:= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Big((p-1)C_0\int_0^\infty f(t)\,dt\Big)^{-1/(p-1)} \\ &\quad \Big(= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Big(\frac{\lambda_1}{C_0}\Big)^{1/(p-1)}\varepsilon_0\Big). \end{aligned}$$

3. 主結果

主結果を述べる前に, 局所解の存在について述べる.

命題 1 (局所解の存在)**.** (5) 及び (6) を仮定する. このとき, ある $T > 0$ および $\{A_j(t)\} \in C^1([0,T);\ell_1^2)$ が一意的に存在して

$$(12)\quad u = \sum_{j\in\mathbf{Z}} A_j(t)U_{ja}(t,x)\ \big(\in L^\infty(0,T;L^\infty(\mathbf{R}^n))\big)$$

が (1)–(4) の解かつ $A_j(0) = \mu_j$ $(j \in \mathbf{Z})$ となる.

命題 1 の証明のアイディアは [12], [13] のそれに基づく (そこでは初期値をデルタ関数の重ね合わせとした非線型シュレディンガー方程式について考察されている). 具体的には偏微分方程式 (1) を $\{A_j(t)\}$ の微分方程式系に帰着させ, 縮小写像の原理を用いて解の一意存在性を示す.

注意 1. [12], [13] (あるいは [5], [8]) においては, 初期値がデルタ関数型であることから,

$$1 < p < 1 + \frac{2}{n}$$

であることが可解性についての十分条件であった ($p \ge 1 + 2/n$ の場合にはこの問題が非適切であることにも注意する [11]). しかし本稿の場合には, 局所解について $p > 1$ に課す制限が不要となること, 特に第 1 節にて述べた非線型光学における基礎方程式として現れる $n = 1, p = 3, \mathcal{L} = -i\Delta + d$ (d は正定数) の場合も命題 1 に含まれていることに注意する.

それでは, 本稿の主結果として命題 1 において存在が保証された局所解の時間大域的性質を述べる. ここでは f の $[1,\infty)$ での広義可積分性が鍵となる.

定理 2 (解の時間大域性)**.** (5), (6), $\lambda_1 > 0$ を仮定する. このとき, 命題 1 において存在した $\{A_j(t)\}$ について, 次が成り立つ.

(i) $\displaystyle\int_0^\infty f(t)\,dt = \infty$ のとき:
任意の $\{\mu_j\} \in \ell_1^2$ に対して, ある $T^* > 0$ が存在して $\displaystyle\lim_{t\to T^*-0}\|\{A_j(t)\}\|_{\ell_1^2} = \infty$ となる.

(ii) $\displaystyle\int_0^\infty f(t)\,dt < \infty$ のとき:
(a) $\|\{\mu_j\}\|_{\ell_0^2} > \varepsilon_0$ ならば, ある $T^* > 0$ が存在して $\displaystyle\lim_{t\to T^*-0}\|\{A_j(t)\}\|_{\ell_1^2} = \infty$ となる.
(b) $\|\{\mu_j\}\|_{\ell_1^2} \le \varepsilon_1$ ならば, $\{A_j(t)\} \in C^1([0,\infty);\ell_1^2)$ となり, (12) が (1)–(4) の大域解となる. さらに $\|\{\mu_j\}\|_{\ell_1^2} < \varepsilon_1$ ならば, ある $\{\nu_j\} \in \ell_1^2$ が存在して $\displaystyle\lim_{t\to\infty}\|\{A_j(t)\} - \{\nu_j\}\|_{\ell_1^2} = 0$ となる.

上の定理で解を有限時刻爆発させる効果を担っているのは仮定の $\lambda_1 > 0$ の部分である. それは定理 2 の証明における (31) やその結果として得られる (34) からも分かる. 一方, そうでない場合, すなわち $\lambda_1 \le 0$ の場合は方程式に非線型の消散性が付与されることが期待され, それ故に時間大域解の存在が上の定理の状況よりも成り立ちやすくなると考えられる. この場合の考察ついては別の機会を待ちたい.

注意 2. (11) において定められた ε_0 は (よって ε_1 も) a に依らない, ただし a とは初期値 (4) で選んだもの, すなわち初期値を成す平面波たちの波数ベクトルを生成するものである. このことも定理 2 の証明における

(31) や (33) からわかる.

注意 3. 定理 2 (ii) において, $\|\{\mu_j\}\|_{\ell^2_0} \le \varepsilon_0$ かつ $\varepsilon_1 < \|\{\mu_j\}\|_{\ell^2_1}$ のときは, $\{A_j(t)\}$ が大域的に存在するか否か一般には未解決である. 閾値を特定できる例として, $P(t,\xi) = d(t) + i|\xi|$, 初期値が $u(0,x) = \mu E_a(x)$ ($\mu \in \mathbf{C}$, $a \in \mathbf{R}^n$) の場合がある. この場合は [6] のように厳密解が求まるため, 解の時間大域的性質を決定する $|\mu|$ ($= \|\{\mu_j\}\|_{\ell^2_0} = \|\{\mu_j\}\|_{\ell^2_1}$) の閾値は ε_0 であることが分かる.

本節を終えるに当たって, ε_0 を具体的に計算できる $d(t)$ の例を挙げ, 実際に計算してみる.

3.1　具体的な d に対する ε_0 の計算例

$\lambda_1 > 0$ とする. 以下のような d は [8] においても考察された. なお, 以下の例は [8] において $n = 0$, $\mathrm{Im}\,\nu = \lambda_1$ (n, ν は それぞれ [8] で考えている発展方程式の空間変数の次元及び非線型項の複素係数を指す) としたものと一致する.

例 1 (Doi [7])**.** $d_0 \in \mathbf{R}$ とし, $d(t) \equiv d_0$ とする. このとき $f(t) = \exp(-d_0(p-1)t)$ であり,

$$\int_0^\infty f(t)\,dt = \begin{cases} \dfrac{1}{d_0(p-1)} & \text{if } d_0 > 0, \\ \infty & \text{if } d_0 \le 0 \end{cases}$$

となる. ここで $d_0 > 0$ とすれば ε_0 は次の値となる:

$$\varepsilon_0 = \Big(\frac{d_0}{\lambda_1}\Big)^{1/(p-1)}.$$

例 2. $d_0 \in \mathbf{R}, \alpha < 1$ に対し,

$$d(t) = \frac{d_0}{t^\alpha} \quad (t > 0)$$

とする ($\alpha = 0$ の場合が例 1 である). このとき,

$$f(t) = \exp\Big(-\frac{d_0(p-1)}{1-\alpha}t^{1-\alpha}\Big)$$

である. これより

$$\int_0^\infty f(t)\,dt = \begin{cases} I & \text{if } d_0 > 0, \\ \infty & \text{if } d_0 \le 0 \end{cases}$$

である, ただし

$$I = \Big(\frac{(1-\alpha)^\alpha}{d_0(p-1)}\Big)^{1/(1-\alpha)} \Gamma\Big(\frac{1}{1-\alpha}\Big)$$

とした. ここで $d_0 > 0$ とすれば ε_0 は次の値となる:

$$\varepsilon_0 = \Big(\frac{p-1}{1-\alpha}\Big)^{\frac{\alpha}{(1-\alpha)(p-1)}} \Big(\frac{d_0^{1/(1-\alpha)}}{\lambda_1 \Gamma(1/(1-\alpha))}\Big)^{\frac{1}{p-1}}.$$

例 3. $d_0 \in \mathbf{R}$ に対し,

$$d(t) = \frac{d_0}{1+t} \quad (t > 0)$$

とする. このとき,

$$f(t) = (1+t)^{-d_0(p-1)}$$

である. これより

$$\int_0^\infty f(t)\,dt = \begin{cases} I & \text{if } d_0 > 1/(p-1), \\ \infty & \text{if } d_0 \le 1/(p-1) \end{cases}$$

である, ただし

$$I = \frac{1}{d_0(p-1)-1} \quad \big(= B(1, d_0(p-1)-1)\big)$$

(B はベータ関数) とした. ここで $d_0 > 1/(p-1)$ とすれば ε_0 は次の値となる:

$$\varepsilon_0 = \Big(\frac{d_0(p-1)-1}{(p-1)\lambda_1}\Big)^{1/(p-1)}.$$

4.　命題 1 の証明

4.1　証明のための準備

命題 1 を示すために, 以下の 2 つの補題を用いる.

補題 3. $a \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\}$, $\{A_j(t)\} \in C([0,T); \ell^2_1)$ とする. このとき任意の $t \in [0,T)$, $x \in \mathbf{R}^n$ に対して次が成立する:

$$\mathcal{N}\Big(\sum_{j\in\mathbf{Z}} A_j(t) U_{ja}(t)(t,x)\Big) = \sum_{j\in\mathbf{Z}} \widetilde{A}_j(t) U_{ja}(t,x), \tag{13}$$

ただし

$$\widetilde{A}_j(t) = \frac{1}{2\pi}\exp\Big(\int_0^t P(s,ja)\,ds\Big)\langle \mathcal{N}(v(t,\theta)), e^{ij\theta}\rangle_\theta,$$

$$v = v(t,\theta) = \sum_{j\in\mathbf{Z}} A_j(t)\exp\Big(-\int_0^t P(s,ja)\,ds\Big)e^{ij\theta}$$

とする.

注意 4. この補題の証明に (6) を仮定する必要はない.

証明. $v(t,\theta)$ は θ の関数として周期 2π の周期関数であるので, $\mathcal{N}(v(t,\theta))$ も周期 2π の周期関数である. よって, $\mathcal{N}(v(t,\theta))$ をフーリエ級数展開することにより

$$\begin{aligned}\mathcal{N}(v(t,\theta)) &= \frac{1}{2\pi}\sum_{j\in\mathbf{Z}} \langle \mathcal{N}(v(t,\varphi)), e^{ij\varphi}\rangle_\varphi e^{ij\theta} \\ &= \sum_{j\in\mathbf{Z}} \widetilde{A}_j(t)\exp\Big(-\int_0^t P(s,ja)\,ds\Big)e^{ij\theta}\end{aligned}$$

となる. よって $a\cdot x = \theta$ とおくことで (13) を得る. □

補題 4. (6) を仮定する. $T>0$ とし, $I=[0,T)$ または $I=[0,\infty)$ とする. また, $\{A_j\}$, $\{A_j^{(1)}\}$, $\{A_j^{(2)}\}\in L^\infty(I;\ell_1^2)$ に対し, $\{\widetilde{A}_j\}$, $\{\widetilde{A}_j^{(1)}\}$, $\{\widetilde{A}_j^{(2)}\}$ をそれぞれ補題 3 で与えられる列とする. このとき, 任意の $t\in I$ に対して次が成り立つ:

$$(14)\quad \|\{\widetilde{A}_j(t)\}\|_{\ell_1^2}\le Cf(t)\|\{A_j\}\|^p_{L^\infty(I;\ell_1^2)},$$

$$(15)\quad \begin{aligned}&\|\{\widetilde{A}_j^{(1)}(t)\}-\{\widetilde{A}_j^{(2)}(t)\}\|_{\ell_0^2}\\ &\le Cf(t)M^{p-1}\|\{A_j^{(1)}\}-\{A_j^{(2)}\}\|_{L^\infty(I;\ell_0^2)},\end{aligned}$$

ただし $M=\max_{m=1,2}\|\{A_j^{(m)}\}\|_{L^\infty(I;\ell_1^2)}$ とし, $f(t)$ は (7) で定義されたもの, すなわち

$$f(t)=\exp\big(-(p-1)\int_0^t d(s)\,ds\big)$$

とする.

証明. まず (14) を示す.

$$\|\{\widetilde{A}_j(t)\}\|^2_{\ell_1^2}=\sum_{j\in\mathbf{Z}}|\widetilde{A}_j(t)|^2+\sum_{j\in\mathbf{Z}}|j\widetilde{A}_j(t)|^2$$

より, $\sum_{j\in\mathbf{Z}}|\widetilde{A}_j(t)|^2$ と $\sum_{j\in\mathbf{Z}}|j\widetilde{A}_j(t)|^2$ をそれぞれ評価する. 今,

$$\begin{aligned}&(2\pi)^{-1/2}\langle\mathcal{N}(v(t,\theta)),e^{ij\theta}\rangle_\theta\\ &=(2\pi)^{1/2}\exp\big(-\int_0^t P(s,ja)\,ds\big)\widetilde{A}_j(t)\end{aligned}$$

であることに注意すると, パーセヴァルの等式と (6) より

$$\|\mathcal{N}(v(t))\|^2_{L^2}=2\pi\exp\big(-2\int_0^t d(s)\,ds\big)\sum_{j\in\mathbf{Z}}|\widetilde{A}_j(t)|^2$$

が成り立つ. よって

(16)

$$\begin{aligned}\sum_{j\in\mathbf{Z}}|\widetilde{A}_j(t)|^2&=\frac{1}{2\pi}\exp\big(2\int_0^t d(s)\,ds\big)\|\mathcal{N}(v(t))\|^2_{L^2}\\ &\le\exp\big(2\int_0^t d(s)\,ds\big)\|v(t)\|^{2p}_{L^\infty}\end{aligned}$$

となる. ここで, シュワルツの不等式より

(17)

$$\begin{aligned}&\|v(t)\|_{L^\infty}\\ &=\operatorname*{ess.sup}_{\theta\in\mathbf{T}}|v(t,\theta)|\\ &=\operatorname*{ess.sup}_{\theta\in\mathbf{T}}\Big|\sum_{j\in\mathbf{Z}}A_j(t)\exp\big(-\int_0^t P(s,ja)\,ds\big)e^{ij\theta}\Big|\\ &\le\exp\big(-\int_0^t d(s)\,ds\big)\big(\sum_{j\in\mathbf{Z}}(1+|j|^2)|A_j(t)|^2\big)^{1/2}\\ &\qquad\times\big(\sum_{j\in\mathbf{Z}}\frac{1}{1+|j|^2}\big)^{1/2}\\ &\le C\exp\big(-\int_0^t d(s)\,ds\big)\|\{A_j(t)\}\|_{\ell_1^2}\\ &\le C\exp\big(-\int_0^t d(s)\,ds\big)\|\{A_j\}\|_{L^\infty(I;\ell_1^2)}\end{aligned}$$

であるので, (16) と (17) を併せて

$$(18)\quad \sum_{j\in\mathbf{Z}}|\widetilde{A}_j(t)|^2\le Cf(t)^2\|\{A_j\}\|^{2p}_{L^\infty(I;\ell_1^2)}$$

を得る. 次に部分積分から

$$\begin{aligned}&j\widetilde{A}_j(t)\\ &=\frac{1}{2\pi i}\exp\big(\int_0^t P(s,ja)\,ds\big)\langle\partial_\theta\mathcal{N}(v(t,\theta)),e^{ij\theta}\rangle_\theta\end{aligned}$$

がわかるので, パーセヴァルの等式と (6) より

$$(19)\quad \begin{aligned}&\sum_{j\in\mathbf{Z}}|j\widetilde{A}_j(t)|^2\\ &=\frac{1}{2\pi}\exp\big(2\int_0^t d(s)\,ds\big)\|\partial_\theta\mathcal{N}(v(t))\|^2_{L^2}\end{aligned}$$

となる. ここで, 簡単な計算によって

$$\partial_\theta\mathcal{N}(v)=\frac{p+1}{2}|v|^{p-1}\partial_\theta v+\frac{p-1}{2}|v|^{p-3}v^2\overline{\partial_\theta v}$$

であることがわかるので,

$$(20)\quad \|\partial_\theta\mathcal{N}(v)\|_{L^2}\le p\|v\|^{p-1}_{L^\infty}\|\partial_\theta v\|_{L^2}$$

となることに注意する. また,

$$\partial_\theta v(t,\theta)=\sum_{j\in\mathbf{Z}}ijA_j(t)\exp\big(-\int_0^t P(s,ja)\,ds\big)e^{ij\theta}$$

でることとパーセヴァルの等式及び (6) から

$$(21)\quad \begin{aligned}&\|\partial_\theta v(t)\|_{L^2}\\ &=(2\pi)^{1/2}\exp\big(-\int_0^t d(s)\,ds\big)\|\{jA_j(t)\}\|_{\ell_0^2}\\ &\le C\exp\big(-\int_0^t d(s)\,ds\big)\|\{A_j(t)\}\|_{\ell_1^2}\\ &\le C\exp\big(-\int_0^t d(s)\,ds\big)\|\{A_j\}\|_{L^\infty(I;\ell_1^2)}\end{aligned}$$

であるので, (19) から (21) までと (17) を併せて

$$(22)\qquad \sum_{j\in\mathbf{Z}} |j\widetilde{A}_j(t)|^2 \le Cf(t)^2\|\{A_j\}\|^{2p}_{L^\infty(I;\ell^2_1)}$$

を得る. よって (18) と (22) より, (14) が成り立つ.

次に (15) を示す. $m=1,2$ に対して

$$v_m(t,\theta)=\sum_{j\in\mathbf{Z}} A_j^{(m)}(t)\exp\big(-\int_0^t P(s,ja)\,ds\big)e^{ij\theta}$$

とおくと, $\{\widetilde{A}_j^{(m)}\}$ の定義, パーセヴァルの等式及び (6) から

(23)

$$\|\{\widetilde{A}_j^{(1)}(t)\}-\{\widetilde{A}_j^{(2)}(t)\}\|^2_{\ell^2_0}=\sum_{j\in\mathbf{Z}}|\widetilde{A}_j^{(1)}(t)-\widetilde{A}_j^{(2)}(t)|^2$$
$$=\frac{1}{2\pi}\exp\big(2\int_0^t d(s)\,ds\big)\|\mathcal{N}(v_1(t))-\mathcal{N}(v_2(t))\|^2_{L^2}$$

が成り立つ. ここで

$$|\mathcal{N}(v_1)-\mathcal{N}(v_2)|\le C(|v_1|^{p-1}+|v_2|^{p-1})|v_1-v_2|$$

に気を付ければ, (23), (17) と併せて (15) を得る.

以上により補題 4 が示された. □

これらの補題を用いて, 命題 1 の証明を行う.

4.2　命題 1 の証明

(12) を (1) に代入する. このとき, $\{U_{ja}\}_{j\in\mathbf{Z}}$ が

$$\partial_t U_{ja}(t,x)+\mathcal{L}U_{ja}(t,x)=0$$

を満たすことと補題 3 から

$$\sum_{j\in\mathbf{Z}}\frac{dA_j}{dt}(t)U_{ja}(t,x)=\sum_{j\in\mathbf{Z}}\lambda\widetilde{A}_j(t)U_{ja}(t,x)$$

を得る. ここで, $\sum_{j\in\mathbf{Z}} B_j(t)U_{ja}(t,x)=0$ であることと任意の $j\in\mathbf{Z}$ に対して $B_j(t)=0$ となることは同値であることに注意する. 実際, $\sum_{j\in\mathbf{Z}} B_j(t)U_{ja}(t,x)=0$ と仮定して, 両辺をフーリエ変換すると $\mathbf{R}^n_\xi$ 上の超関数の意味で

$$\sum_{j\in\mathbf{Z}} B_j(t)\exp\big(-\int_0^t P(s,ja)\,ds\big)\delta_{ja}(\xi)=0$$

となる, ただし δ_b を $\xi=b\in\mathbf{R}^n$ に台を持つデルタ関数とした. よって $B_j(t)=0$ $(j\in\mathbf{Z})$ が従う. これより, 次の常微分方程式系を得る:

$$(24)\qquad \begin{cases}\dfrac{dA_j}{dt}=\lambda\widetilde{A}_j(t), & \text{for } t\in(0,T),\ j\in\mathbf{Z},\\ A_j(0)=\mu_j.\end{cases}$$

命題 1 を示すには, (24) に対する (考えるクラスの中での) 解の一意存在性を示せば十分である. これを示すために, 次の積分方程式系を考える:

$$(25)\qquad A_j(t)=\mu_j+\lambda\int_0^t\widetilde{A}_j(\tau)\,d\tau$$
$$=:[\varPhi_j(\{A_k\})](t),\quad t\in[0,T),\ j\in\mathbf{Z}.$$

以下では縮小写像の原理によって (24) の解の一意存在性を導く. そのために, 写像

$$\varPhi\colon \boldsymbol{A}=\{A_j\}\mapsto\{\varPhi_j(\boldsymbol{A})\}$$

が縮小性をもつ空間を設定する. $\rho=\|\{\mu_j\}\|_{\ell^2_1}$ とし

$$\overline{B_{2\rho}}=\big\{\{A_j\}\in L^\infty(0,T;\ell^2_1);$$
$$\|\{A_j\}\|_{L^\infty(0,T;\ell^2_1)}\le 2\rho\big\}$$

とおく, ここで $\overline{B_{2\rho}}$ の位相を $L^\infty(0,T;\ell^2_0)$-ノルムにより定める. このとき, $\overline{B_{2\rho}}$ はこの位相について閉である. これより, $\overline{B_{2\rho}}$ はこの位相について完備である. また, 補題 4 から, すべての $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in\overline{B_{2\rho}}$ に対して次の評価が成り立つ:

$$(26)\qquad \|\varPhi(\boldsymbol{A})\|_{L^\infty(0,T;\ell^2_1)}\le\rho+C(2\rho)^p\int_0^T f(\tau)\,d\tau,$$

$$(27)\qquad \|\varPhi(\boldsymbol{A})-\varPhi(\boldsymbol{B})\|_{L^\infty(0,T;\ell^2_0)}$$
$$\le C(2\rho)^{p-1}\int_0^T f(\tau)\,d\tau\,\|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\|_{L^\infty(0,T;\ell^2_0)}.$$

また, 仮定 (6) にあるように $d\in L^1_{\mathrm{loc}}([0,\infty),\mathbf{R})$ であるので, d は $[0,T]$ 上で可積分となる. これより, $\int_0^t d(s)\,ds$ は $[0,T]$ 上で連続である (例えば [17] 定理 5.10 を参照). よって f も $[0,T]$ 上で連続となる. 故に

$$\int_0^T f(\tau)\,d\tau\le T\sup_{0\le\tau\le T}f(\tau)$$

である. この不等式と (26), (27) から, $T>0$ を十分小さくとることにより写像 $\varPhi$ は $\overline{B_{2\rho}}$ 上の縮小写像となる. よって縮小写像の原理から $\boldsymbol{A}=\{A_j\}\in L^\infty(0,T;\ell^2_1)$ で (25) の解となるものが存在する. また, ルベーグの収束定理から $\boldsymbol{A}\in C^1([0,T);\ell^2_1)$ が従う. $C([0,T);\ell^2_0)$ における一意性も標準的な議論より従う.

以上より命題 1 が示された. □

5. 定理 2 の証明

5.1 証明のための準備

まず, 補題 3 において $\widetilde{A}_j(t)$ を定義する際に用いられた

$$v(t,\theta) = \sum_{j\in\mathbf{Z}} A_j(t)\exp\Big(-\int_0^t P(s,ja)\,ds\Big)e^{ij\theta}$$

は, (24) より

$$\partial_t v + \mathcal{L}_a v = \lambda\mathcal{N}(v) \tag{28}$$

を満たす, ただし

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_a v &:= \frac{1}{2\pi}\sum_{j\in\mathbf{Z}} P(t,ja)\langle v(t,\varphi), e^{ij\varphi}\rangle_\varphi e^{ij\theta}\\ &= \sum_{j\in\mathbf{Z}} P(t,ja)A_j(t)\exp\Big(-\int_0^t P(s,ja)\,ds\Big)e^{ij\theta}\end{aligned}$$

とした. また, パーセヴァルの等式より

$$\|\{A_j(t)\}\|_{\ell_0^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\Big(\int_0^t d(s)\,ds\Big)\|v(t)\|_{L^2},$$

$$\|\{jA_j(t)\}\|_{\ell_0^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\Big(\int_0^t d(s)\,ds\Big)\|\partial_\theta v(t)\|_{L^2}$$

が成り立つ.

さて, (28) の両辺に $\overline{v}$ を掛けて $\mathbf{T}$ 上で積分し, さらにその両辺の実部を取ることにより,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|v(t)\|_{L^2}^2 + d(t)\|v(t)\|_{L^2}^2 = \lambda_1\|v(t)\|_{L^{p+1}}^{p+1} \tag{29}$$

を得る. 実際, (29) の左辺第 2 項 $d(t)\|v(t)\|_{L^2}^2$ は次のようにして得られる:

$$\begin{aligned}&\mathrm{Re}\int_{\mathbf{T}}(\mathcal{L}_a v(t,\theta))\overline{v(t,\theta)}\,d\theta\\ &= \mathrm{Re}\Big(\sum_{j\in\mathbf{Z}} P(t,ja)A_j(t)\exp\Big(-\int_0^t P(s,ja)\,ds\Big)\\ &\qquad\times\sum_{k\in\mathbf{Z}}\overline{A_k(t)}\exp\Big(-\int_0^t\overline{P(s,ka)}\,ds\Big)\langle e^{ij\theta},e^{ik\theta}\rangle_\theta\Big)\\ &= d(t)\Big(2\pi\exp\Big(-2\int_0^t d(s)\,ds\Big)\sum_{j\in\mathbf{Z}}|A_j(t)|^2\Big)\\ &= d(t)\|v(t)\|_{L^2}^2.\end{aligned}$$

ここで

$$w(t,\theta) := \exp\Big(\int_0^t d(s)\,ds\Big)v(t,\theta) \tag{30}$$

とおく. このとき (29) より

$$\frac{d}{dt}\|w(t)\|_{L^2}^2 = 2\lambda_1 f(t)\|w(t)\|_{L^{p+1}}^{p+1} \tag{31}$$

が成り立つ, ただし f は (7) で定義されたものである. また, (28) の両辺を θ について偏微分してから両辺に $\overline{\partial_\theta v}$ を掛けて $\mathbf{T}$ 上で積分し, その両辺の実部を取ることで

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\partial_\theta v(t)\|_{L^2}^2 + d(t)\|\partial_\theta v(t)\|_{L^2}^2\\ = \mathrm{Re}\big(\lambda\langle\partial_\theta\mathcal{N}(v(t,\theta)),\partial_\theta v(t,\theta)\rangle_\theta\big)\end{aligned} \tag{32}$$

となる. なお, (32) の左辺第 2 項は (29) のそれと同じようにして得られる. ここで (30) を用いると

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\|\partial_\theta w(t)\|_{L^2}^2\\ = 2f(t)\mathrm{Re}\big(\lambda\langle\partial_\theta\mathcal{N}(w(t,\theta)),\partial_\theta w(t,\theta)\rangle_\theta\big)\end{aligned} \tag{33}$$

となる.

それでは以下で定理 2-(i) および (ii) を示す. 以下では (31), (33) を用いて

$$\begin{aligned}\|w(t)\|_{H^1}^2\big(&= \|w(t)\|_{L^2}^2 + \|\partial_\theta w(t)\|_{L^2}^2\\ &= 2\pi\|\{A_j(t)\}\|_{\ell_1^2}^2\big)\end{aligned}$$

を評価する.

5.2 定理 2-(i) の証明

背理法にて証明する. そこで, 結論が成り立たないと仮定する, すなわち, 任意の $t \geq 0$ に対して $\|\{A_j(t)\}\|_{\ell_1^2} < \infty$ と仮定する. この仮定のもとで矛盾を導く. まず, ヘルダーの不等式より $\|w\|_{L^{p+1}}^{p+1} \geq (2\pi)^{-(p-1)/2}\|w\|_{L^2}^{p+1}$ が成り立つことに注意する. これより (31) と主張における仮定 $\lambda_1 > 0$ より

$$\frac{d}{dt}\|w(t)\|_{L^2}^2 \geq 2(2\pi)^{-(p-1)/2}\lambda_1 f(t)\|w(t)\|_{L^2}^{p+1}$$

を得る. よって

$$\|w(t)\|_{L^2}^{p-1} \geq \frac{\|w(0)\|_{L^2}^{p-1}}{F_0(t)} \tag{34}$$

となる, ただし $F_0\colon [0,\infty) \to \mathbf{R}$ を

$$F_0(t) = 1-(p-1)\lambda_1\|\{\mu_j\}\|_{\ell_0^2}^{p-1}\int_0^t f(\tau)\,d\tau$$

とした (F_0 は連続関数である). ここで $\lambda_1 > 0$ より F_0 は単調減少であり, また $\displaystyle\int_0^\infty f(t)\,dt = \infty$ より $\mathcal{R}(F_0) = (-\infty, 1]$ である[*1]. よって中間値の定理から $F_0(T^*) = 0$ となる $T^* > 0$ が存在する. これより

$$\lim_{t\to T^*-0}\|w(t)\|_{L^2} = \infty$$

[*1] $\mathcal{R}(F_0)$ は F_0 の値域 $\{F_0(t)\in\mathbf{R}\mid t\in[0,\infty)\}$ を表す.

すなわち

$$\lim_{t\to T^*-0}\|\{A_j(t)\}\|_{\ell_1^2}=\infty$$

が成り立つ. ところがこれは, 任意の $t\geq 0$ に対して $\|w(t)\|_{L^2}\leq C\|\{A_j(t)\}\|_{\ell_0^2}\leq C\|\{A_j(t)\}\|_{\ell_1^2}<\infty$ となることに矛盾する (最後の不等式が仮定である). よって (i) が示された.

5.3　定理 2-(iia) の証明

(i) の証明と同じように背理法により示す. 任意の $t\geq 0$ に対して $\|\{A_j(t)\}\|_{\ell_1^2}<\infty$ とする. このとき (34) を得る. ここで $\lambda_1>0$ より F_0 は単調減少であり, また $\|\{\mu_j\}\|_{\ell_0^2}>\varepsilon_0$ より $\mathcal{R}(F_0)\cap(-\infty,0)\neq\emptyset$ である. よって中間値の定理から $F_0(T^*)=0$ となる $T^*>0$ が存在する. あとは (i) の証明と同じようにして矛盾が導かれる. よって (iia) が示された.

5.4　定理 2-(iib) の証明

$\|w(t)\|_{H^1}^2(=2\pi\|\{A_j(t)\}\|_{\ell_1^2}^2)$ をア・プリオリ評価する. ガリアルド・ニレンベルグの不等式 (9)–(10), シュワルツの不等式, さらに (20) を (31) と (33) に適用すると

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\|w\|_{L^2}^2 &\leq 2\lambda_1 f(t)\gamma_{p+1}^{p+1}\|w\|_{L^2}^{(p+3)/2}\|w\|_{H^1}^{(p-1)/2}\\
&\leq 2C_1 f(t)\|w\|_{H^1}^{p+1},\\
\frac{d}{dt}\|\partial_\theta w\|_{L^2}^2 &\leq 2f(t)|\lambda|\|\partial_\theta\mathcal{N}(w)\|_{L^2}\|\partial_\theta w\|_{L^2}\\
&\leq 2f(t)|\lambda|p\|w\|_{L^\infty}^{p-1}\|\partial_\theta w\|_{L^2}\|\partial_\theta w\|_{L^2}\\
&\leq 2f(t)|\lambda|p\gamma_\infty^{p-1}\\
&\qquad\times\|w\|_{L^2}^{(p-1)/2}\|w\|_{H^1}^{((p-1)/2)+2}\\
&\leq 2C_2 f(t)\|w\|_{H^1}^{p+1},
\end{aligned}$$

を得る, ただし C_1 と C_2 は正定数で (8) で定められたものである. これより

$$\frac{d}{dt}\|w\|_{H^1}^2\leq 2C_0 f(t)\|w\|_{H^1}^{p+1}$$

を得る, ただし $C_0=C_1+C_2$ である. 故に

$$\|w(t)\|_{H^1}^{p-1}\leq\frac{\|w(0)\|_{H^1}^{p-1}}{F_1(t)} \tag{35}$$

が成り立つ, ただし $F_1\colon[0,\infty)\to\mathbf{R}$ を

$$\begin{aligned}
&F_1(t)\\
&=1-(2\pi)^{(p-1)/2}(p-1)C_0\|\{\mu_j\}\|_{\ell_1^2}^{p-1}\int_0^t f(\tau)\,d\tau
\end{aligned}$$

とした. よって $\lim_{t\to\infty}F_1(t)\geq 0$ すなわち $\|\{\mu_j\}\|_{\ell_1^2}\leq\varepsilon_1$ であるとき, $\{A_j(t)\}\in C^1([0,\infty);\ell_1^2)$ となる.

さらに $\|\{\mu_j\}\|_{\ell_1^2}<\varepsilon_1$ の場合を考える. このとき, (35) より, ある定数 $C>0$ が存在して任意の $t\geq 0$ に対し $\|\{A_j(t)\}\|_{\ell_1^2}=(2\pi)^{-1/2}\|w(t)\|_{H^1}<C$ が成り立つ. ここで

$$\{\nu_j\}:=\{\mu_j\}+\lambda\int_0^\infty\{\widetilde{A}_j(\tau)\}\,d\tau$$

とおく. なお, この右辺第 2 項の広義積分は補題 4 の (14) 及び仮定 $\int_0^\infty f(t)\,dt<\infty$ より ℓ_1^2 の意味で収束することに注意する. これより $\{\nu_j\}\in\ell_1^2$ である. また, 再び (14) より

$$\begin{aligned}
&\|\{A_j(t)\}-\{\nu_j\}\|_{\ell_1^2}\\
&\leq C\|\{A_j(t)\}\|_{L^\infty(0,\infty;\ell_1^2)}^p\int_t^\infty f(\tau)\,d\tau\\
&\leq C\int_t^\infty f(\tau)\,d\tau\longrightarrow 0\quad(t\to\infty)
\end{aligned}$$

を得る (最後の積分が 0 に収束するのには, f が $[0,\infty)$ 上で正であることと仮定 $\int_0^\infty f(t)\,dt<\infty$ を用いた). よって (iib) が示された.

第 5.2–5.4 節より, 定理 2 が示された. □

謝辞

本研究は公益財団法人富山第一銀行奨学財団 及び JSPS 科研費 24740106 の助成を受けて行われました. 深く感謝致します.

参考文献

[1] G. P. Agrawal, Nonlinear fiber optics (4th ed.), Academic Press, 2006.

[2] ——, Applications of nonlinear fiber optics (2nd ed.), Academic Press, 2008.

[3] J. Bourgain, Fourier transform restriction phenomena for certain lattice subsets and applications to nonlinear evolution equations. I. Schrödinger equations, Geom. Funct. Anal. **3** (1993), 107–156.

[4] ——, Fourier transform restriction phenomena for certain lattice subsets and applications to nonlinear evolution equations. II. The KdV-equation, Geom. Funct. Anal. **3** (1993), 209–262.

[5] K. Doi, On the damped nonlinear Schrödinger equation with delta functions as initial data, J. Math. Kyoto Univ. **48** (2008), 363–372.

[6] K. Doi, Fully nonlinear gauge invariant evolution of the plane wave, Differential Integral Equations **21** (2008), 851–858.

[7] K. Doi, Nonlinear gauge invariant evolution of superposed plane waves, Funkcial. Ekvac. **54** (2011), 95–118.

[8] 土井一幸, デルタ関数を初期値とする時間依存型消散項付き非線型シュレディンガー方程式について, 富山県立大学紀要 **22** (2012), 18–27.

[9] G. Fibich, Self-focusing in the damped nonlinear Schrödinger equation, SIAM J. Appl. Math. **61** (2001), 1680–1705.

[10] O. Goubet, Asymptotic smoothing effect for a weakly damped nonlinear Schrödinger equation in $\mathbf{T}^2$, J. Differential Equations **165** (2000), 96–122.

[11] C. E. Kenig, G. Ponce, and L. Vega, On the ill-posedness of some canonical dispersive equations, Duke Math. J. **106** (2001), 617–633.

[12] N. Kita, Mode generating property of solutions to the nonlinear Schrödinger equations in one space dimension, in *Nonlinear dispersive equations*. Ozawa, T. and Tsutsumi, Y. (Eds.), GAKUTO Internat. Ser. Math. Sci. Appl. 26, Gakkōtosho, Tokyo, 2006, 111–128.

[13] ——, Nonlinear Schrödinger equations with δ-functions as initial data, to appear in Math. Z.

[14] G. Moebs, and R. Temam, Resolution of a stochastic weakly damped nonlinear Schrödinger equation by a multilevel numerical method, J. Opt. Soc. Amer. A **17** (2000), 1870–1879.

[15] K. Sasaki, and R. Ohya, Solitary-wave solutions of a forced nonlinear Schrödinger equation with damping, J. Phys. Soc. Japan **63** (1994), 493–499.

[16] M. Tsutsumi, Nonexistence of global solutions to the Cauchy problem for the damped nonlinear Schrödinger equations, SIAM J. Math. Anal. **15** (1984), 357–366.

[17] 谷島賢二, ルベーグ積分と関数解析 (講座 “数学の考え方” 13), 朝倉書店, 2002.

On Nonlinear Dispersive Equations with Time-Dependent Dissipation Involving Plane Waves as Initial Data

Kazuyuki DOI
Department of Liberal Arts and Sciences, Faculty of Engineering

Summary

In this paper, we consider the Cauchy problem for nonlinear dispersive equations with time-dependent dissipation and superposed plane waves as initial data. The aim of this paper is to study the influence of nonlinearity and damping on the solution expressed by a special form. The case where the nonlinearity makes the solution unstable is of special interest, because the dissipative nature from the damping comes into play in this case.

Key Words: nonlinear dispersive equations, time-dependent dissipation, plane waves, global solutions, blow-up solutions