

近似正規乱数として多点分布確率変数を用いたときの確率微分方程式の実現解の安定領域

石森 勇次
(工学部教養教育)

確率微分方程式の数値解法において近似正規乱数を用いることがある。その近似正規乱数として、偶数次の2次から $2n$ 次のモーメントまで標準正規乱数と値が等しい $(n+1)$ 点分布確率変数を構成し、1次元線形確率微分方程式を例としてその実現解の安定領域を調べる。

キーワード：確率微分方程式, 近似正規乱数, 多点分布確率変数, モーメント, 実現解, 安定性

1. はじめに

確率過程 X_t についての確率微分方程式 (ここではストラトノヴィチ型)

$$dX_t = a(X_t)dt + b(X_t) \circ dW_t \quad (1)$$

の数値近似解を求めるための差分スキームを構成する際、 X^k を離散時刻

$$t^k = k\Delta t \quad (k = 0, 1, 2, \dots; \Delta t \text{ は刻み幅}) \quad (2)$$

における X_{t^k} の数値解として、 X^{k+1} と X^k , Δt , ΔW^k の関係式を一般には考える [1,2]。ここで、 ΔW^k はウィナー過程の増分

$$\Delta W^k = W^{k+1} - W^k = \xi^k \sqrt{\Delta t} \quad (3)$$

であり、 ξ^k は平均 0 分散 1 の標準正規乱数 $N(0;1)$ である。

しかし、陰的スキームにおける発散の問題を避ける場合や、平均や分散を求める弱い近似スキームのように必ずしも正規乱数を使用する必要がない場合、 ξ^k として近似正規乱数を用いた簡易スキームを考えることがある [2]。この際、任意の次数のモーメントの値が正規乱数のモーメントの値と等しい乱数は正規乱数であることから (付録 A 参照)、モーメントの値が正規乱数の値と一致するのは何次のモーメントなのかによって近似乱数の精度をはかることができる。

本論文では、特に近似正規乱数として多点分布確率変数に注目し、 $2n$ 次のモーメントまで標準正規乱数と値が等しい多点分布確率変数を構成し、1次元線形確率微

分方程式を例として、その実現解の安定領域から多点分布確率変数の乱数としての近似の程度を調べる。

2. 多点分布確率変数

偶数次 (2次, 4次, ..., $2n$ 次) のモーメントが標準正規乱数と同じであるような近似正規乱数を、 $(n+1)$ 点分布確率変数で構成する。これは最小限の数の点から構成される確率変数である。なお乱数は原点について対称な近似正規乱数、すなわち a をある定数として

$$P[\xi^k = a] = P[\xi^k = -a]$$

とする。このとき、奇数次のモーメントは自動的に 0 である。

$2m$ 点分布確率変数 ($n = 2m - 1$) :

$0 < a_1 < a_2 < \dots < a_m$ であるような m 個の正の定数 a_1, a_2, \dots, a_m および m 個の確率

$$P_j = P[\xi^k = \pm a_j] \quad (j = 1, 2, \dots, m) \quad (4)$$

を未知数として、モーメントに対する条件

$$\left\{ \begin{array}{l} 2 \sum_{j=1}^m P_j = 1 \\ 2 \sum_{j=1}^m a_j^2 P_j = 1 \\ 2 \sum_{j=1}^m a_j^4 P_j = 3 \\ \vdots \\ 2 \sum_{j=1}^m a_j^{2n} P_j = 1 \cdot 3 \cdots (2n - 1) \end{array} \right. \quad (5)$$

からそれらを定める。未知数、式の数どちらも $2m$ 個である。

($2m + 1$) 点分布確率変数 ($n = 2m$) :

$0 < a_1 < a_2 < \dots < a_m$ であるような m 個の正の定数 a_1, a_2, \dots, a_m および $(m + 1)$ 個の確率

$$\begin{cases} P_0 = P[\xi^k = 0] \\ P_j = P[\xi^k = \pm a_j] \quad (j = 1, 2, \dots, m) \end{cases} \quad (6)$$

を未知数として、モーメントに対する条件

$$\begin{cases} P_0 + 2 \sum_{j=1}^m P_j = 1 \\ 2 \sum_{j=1}^m a_j^2 P_j = 1 \\ 2 \sum_{j=1}^m a_j^4 P_j = 3 \\ \vdots \\ 2 \sum_{j=1}^m a_j^{2n} P_j = 1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n - 1) \end{cases} \quad (7)$$

からそれらを定める。未知数、式の数どちらも $(2m + 1)$ 個である。

2 点の場合 ($m = 1, n = 1$) :

連立方程式

$$\begin{cases} 2P_1 = 1 \\ 2a_1^2 P_1 = 1 \end{cases} \quad (8)$$

の解は

$$a_1 = 1, P_1 = \frac{1}{2} \quad (9)$$

である [3]。2 点 $(-a_1, f(-a_1)), (a_1, f(a_1))$ を結んだ線分が乱数 ξ^k の確率密度関数 $f(u)$ のグラフを表しているとして、この線分と u 軸で挟まれた領域の面積が 1 になるように $f(\pm a_1) = cP_1$ における係数 c を定めると $c = 1$ となる。標準正規分布関数 (付録 A 参照) と比較するため両者のグラフをかけば、図 1 のようになる。

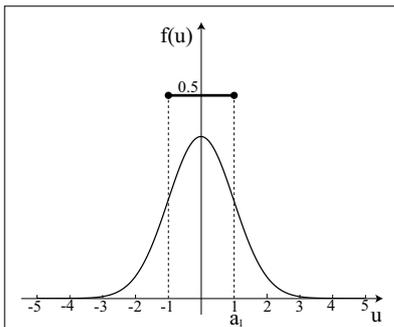


図 1 2 点分布確率変数

3 点の場合 ($m = 1, n = 2$) :

連立方程式

$$\begin{cases} P_0 + 2P_1 = 1 \\ 2a_1^2 P_1 = 1 \\ 2a_1^4 P_1 = 3 \end{cases} \quad (10)$$

の解は

$$a_1 = \sqrt{3}, P_0 = \frac{2}{3}, P_1 = \frac{1}{6} \quad (11)$$

である [3]。3 点

$$(-a_1, f(-a_1)), (0, f(0)), (a_1, f(a_1))$$

を結んだ折れ線が乱数 ξ^k の確率密度関数 $f(u)$ のグラフを表しているとして、この線分と u 軸で挟まれた領域の面積が 1 になるように $f(\pm a_1) = cP_1, f(0) = cP_0$ における係数 c を定めると $c = \frac{2\sqrt{3}}{5}$ となる。グラフをかけば、図 2 のようになる。

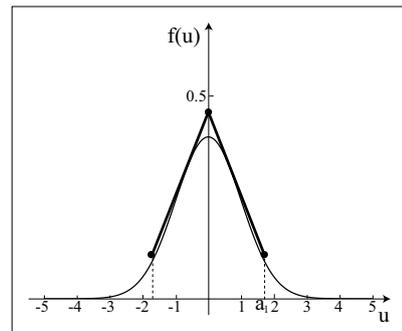


図 2 3 点分布確率変数

4 点の場合 ($m = 2, n = 3$) :

連立方程式

$$\begin{cases} 2P_1 + 2P_2 = 1 \\ 2a_1^2 P_1 + 2a_2^2 P_2 = 1 \\ 2a_1^4 P_1 + 2a_2^4 P_2 = 3 \\ 2a_1^6 P_1 + 2a_2^6 P_2 = 15 \end{cases} \quad (12)$$

の解は

$$\begin{cases} a_1 = \sqrt{3 - \sqrt{6}}, a_2 = \sqrt{3 + \sqrt{6}} \\ P_1 = \frac{3 + \sqrt{6}}{12}, P_2 = \frac{3 - \sqrt{6}}{12} \end{cases} \quad (13)$$

である (付録 B 参照)。2 点、3 点の場合と同様に 4 点を結んだ折れ線が乱数 ξ^k の確率密度関数 $f(u)$ のグラフを表しているとして、この線分と u 軸で挟まれた領域の面積が 1 になるように $f(\pm a_1) = cP_1, f(\pm a_2) = cP_2$ における係数 c を定めグラフをかけば、図 3 のようになる。

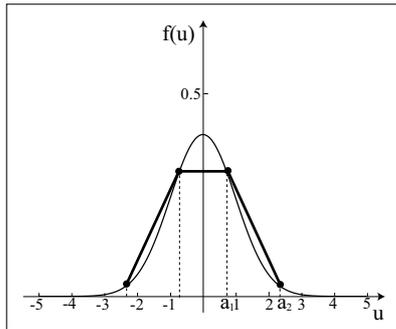


図3 4点分布確率変数

5点の場合 ($m = 2, n = 4$) :

連立方程式

$$\begin{cases} P_0 + 2P_1 + 2P_2 = 1 \\ 2a_1^2 P_1 + 2a_2^2 P_2 = 1 \\ 2a_1^4 P_1 + 2a_2^4 P_2 = 3 \\ 2a_1^6 P_1 + 2a_2^6 P_2 = 15 \\ 2a_1^8 P_1 + 2a_2^8 P_2 = 105 \end{cases} \quad (14)$$

の解は

$$\begin{cases} a_1 = \sqrt{5 - \sqrt{10}}, a_2 = \sqrt{5 + \sqrt{10}} \\ P_0 = \frac{8}{15} \\ P_1 = \frac{7 + 2\sqrt{10}}{60}, P_2 = \frac{7 - 2\sqrt{10}}{60} \end{cases} \quad (15)$$

である (付録 B 参照)。5点を結んだ折れ線が乱数 ξ^k の確率密度関数 $f(u)$ のグラフを表しているとして、この線分と u 軸で挟まれた領域の面積が1になるようにスケールを定めてグラフをかけば、図4のようになる。

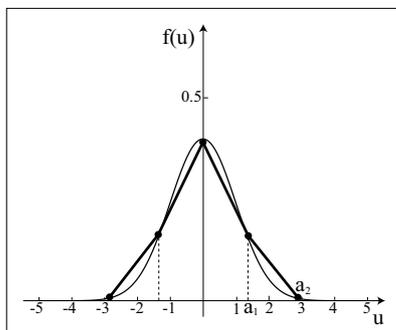


図4 5点分布確率変数

6点以上の場合、連立方程式の解はニュートン法等を用いて近似数値解を求めるしかない。以下では6点および7点の場合について説明する。

6点の場合 ($m = 3, n = 5$) :

連立方程式

$$\begin{cases} 2P_1 + 2P_2 + 2P_3 = 1 \\ 2a_1^2 P_1 + 2a_2^2 P_2 + 2a_3^2 P_3 = 1 \\ 2a_1^4 P_1 + 2a_2^4 P_2 + 2a_3^4 P_3 = 3 \\ 2a_1^6 P_1 + 2a_2^6 P_2 + 2a_3^6 P_3 = 15 \\ 2a_1^8 P_1 + 2a_2^8 P_2 + 2a_3^8 P_3 = 105 \\ 2a_1^{10} P_1 + 2a_2^{10} P_2 + 2a_3^{10} P_3 = 945 \end{cases} \quad (16)$$

の近似解は

$$\begin{cases} a_1 = 0.616706590 \\ a_2 = 1.889175878 \\ a_3 = 3.324257434 \\ P_1 = 0.408828469 \\ P_2 = 0.088615746 \\ P_3 = 0.002555784 \end{cases} \quad (17)$$

である。6点を結んだ折れ線のグラフは図5のようになる。

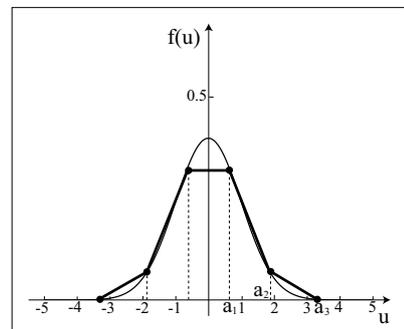


図5 6点分布確率変数

7点の場合 ($m = 3, n = 6$) :

連立方程式

$$\begin{cases} P_0 + 2P_1 + 2P_2 + 2P_3 = 1 \\ 2a_1^2 P_1 + 2a_2^2 P_2 + 2a_3^2 P_3 = 1 \\ 2a_1^4 P_1 + 2a_2^4 P_2 + 2a_3^4 P_3 = 3 \\ 2a_1^6 P_1 + 2a_2^6 P_2 + 2a_3^6 P_3 = 15 \\ 2a_1^8 P_1 + 2a_2^8 P_2 + 2a_3^8 P_3 = 105 \\ 2a_1^{10} P_1 + 2a_2^{10} P_2 + 2a_3^{10} P_3 = 945 \\ 2a_1^{12} P_1 + 2a_2^{12} P_2 + 2a_3^{12} P_3 = 10395 \end{cases} \quad (18)$$

の近似解は

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1 = 1.154405395 \\ a_2 = 2.366759411 \\ a_3 = 3.750439718 \\ P_0 = 0.457142857 \\ P_1 = 0.240123178 \\ P_2 = 0.030757123 \\ P_3 = 0.000548268 \end{array} \right. \quad (19)$$

である。7点を結んだ折れ線のグラフは図6のようになる。

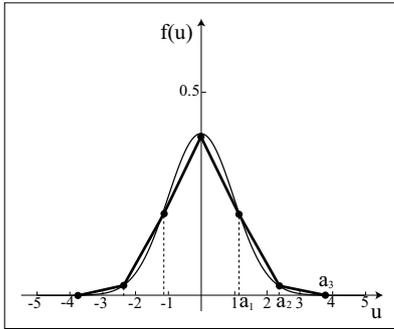


図6 7点分布確率変数

折れ線はかなり正規分布に近いものになっている。

3. 実現解の安定領域

3.1 テスト方程式と実現解

例として

$$a(X_t) = -\alpha X_t, \quad b(X_t) = \beta X_t \quad (\alpha, \beta > 0) \quad (20)$$

の場合、即ち線形の確率微分方程式

$$dX_t = -\alpha X_t dt + \beta X_t \circ dW_t \quad (21)$$

を考える。

確率微分方程式 (21) の区間 $[t^k, t^{k+1}]$ での解析解は

$$X_{t^{k+1}} = \exp\{-\alpha\Delta t + \beta \cdot (W_{t^{k+1}} - W_{t^k})\} X_{t^k} \quad (22)$$

で与えられる。したがって、離散時間における近似ウィナー過程 W^k を用いて実現される厳密解、即ち実現解は

$$X^{k+1} = R^k X^k \quad (23)$$

の形で表すと

$$R^k = \exp(-\alpha\Delta t + \beta\Delta W^k) \quad (24)$$

となる。

3.2 平均2乗漸近安定性

実現解の安定性を調べるため、漸近安定性

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E[|X^n|] = 0 \quad (25)$$

が成り立つかどうかを考える [2,4]。漸近安定であるためには R^k に対する平均2乗漸近安定性の条件

$$E[(R^k)^2] < 1 \quad (26)$$

が成り立てばよい [4]。

$$p = \alpha\Delta t, \quad q = \beta^2\Delta t \quad (27)$$

とおき、 pq 平面上 (ただし、 $p, q > 0$) での安定領域、即ち不等式 (26) が成り立つ領域を考える。

標準正規乱数での不等式 (26) の成り立つ領域は、不等式

$$q < p$$

で表される領域であり、その境界線は直線

$$q = p$$

である (付録 C 参照)。

$2m$ 点分布確率変数を近似正規乱数としたときの安定領域は、

$$\begin{aligned} E[(R^k)^2] &= \exp(-2p) \\ &\times \sum_{j=1}^m \{ \exp(2\sqrt{q}a_j) + \exp(-2\sqrt{q}a_j) \} P_j \\ &< 1 \end{aligned} \quad (28)$$

より、不等式

$$\frac{1}{2} \log \left[\sum_{j=1}^m \{ \exp(2\sqrt{q}a_j) + \exp(-2\sqrt{q}a_j) \} P_j \right] < p \quad (29)$$

で表される領域であり、その境界線は曲線

$$\frac{1}{2} \log \left[\sum_{j=1}^m \{ \exp(2\sqrt{q}a_j) + \exp(-2\sqrt{q}a_j) \} P_j \right] = p \quad (30)$$

である。

また $(2m+1)$ 点分布確率変数を近似正規乱数としたときの安定領域は、

$$\begin{aligned} E[(R^k)^2] &= \exp(-2p) \\ &\times \left[P_0 + \sum_{j=1}^m \{ \exp(2\sqrt{q}a_j) + \exp(-2\sqrt{q}a_j) \} P_j \right] \\ &< 1 \end{aligned} \quad (31)$$

より, 不等式

$$\frac{1}{2} \log \left[P_0 + \sum_{j=1}^m \{ \exp(2\sqrt{q}a_j) + \exp(-2\sqrt{q}a_j) \} P_j \right] < p \tag{32}$$

で表される領域であり, その境界線は曲線

$$\frac{1}{2} \log \left[P_0 + \sum_{j=1}^m \{ \exp(2\sqrt{q}a_j) + \exp(-2\sqrt{q}a_j) \} P_j \right] = p \tag{33}$$

である。

曲線 (30), (33) どちらの場合でも $q \ll 1$ では

$$2 \underbrace{\sum_{j=1}^m a_j^2 P_j}_{=1} \cdot q \approx p$$

$q \gg 1$ では

$$\sqrt{q}a_m \approx p$$

となるので

$$q \approx \begin{cases} p & (q \ll 1) \\ \frac{1}{a_m^2} p^2 & (q \gg 1) \end{cases} \tag{34}$$

である。すなわち, 原点付近では直線, 遠方では放物線である曲線が境界線となっている。

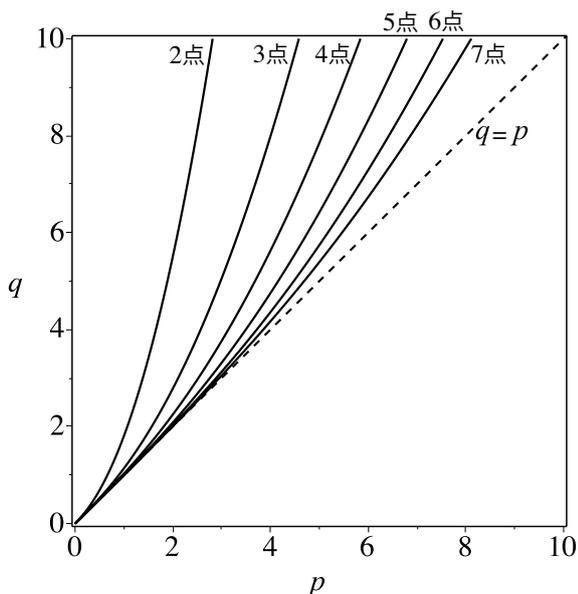


図7 実現解の安定領域の境界線

図7に2点~7点分布確率変数を乱数としたときの実現解の安定領域の境界線を示す。点数が大きくなるにつ

れ標準正規乱数のときの境界線 $q = p$ に近づいていくことがわかる。

4. おわりに

本研究では近似正規乱数としてモーメントに注目して多点分布確率変数の構成を行った。また実現解の安定領域を調べ, 点数が多くなるにつれ, すなわちより高次のモーメントが正規標準乱数と一致するにつれ, 安定領域の境界線が標準正規乱数の境界線に近づくことを確認した。

高次の弱いスキームには高次のモーメントが標準正規乱数と一致する必要がある。今後の高次スキームの研究の中で, ここで調べた近似正規乱数の利用を考えたい。

参考文献

- [1] P.E.Kloeden and E.Platen : *Numerical Solution of Stochastic Differential Equations*, Springer-Verlag, Berlin, 1992.
- [2] E.Platen and N.Bruti-Liberati : *Numerical Solution of Stochastic Differential Equations with Jumps in Finance*, Springer-Verlag, Berlin, 2010.
- [3] 三井斌友, 小藤俊幸, 齊藤善弘 : 微分方程式による計算科学入門, 共立出版, (2004) .
- [4] 齊藤善弘 : 確率ホイン法の平均二乗安定性と漸近安定性, 日本応用数学会論文誌, Vol.21, (2011) 125-134.

付 録

付録 A 正規乱数とモーメント

乱数 ξ^k の確率密度関数を $f(u)$ として, ξ^k の s 次のモーメント $E[(\xi^k)^s]$ ($s = 1, 2, 3, \dots$) は

$$E[(\xi^k)^s] = \int_{-\infty}^{\infty} u^s f(u) du \tag{a1}$$

で定義される。

乱数 ξ^k が標準正規乱数であるとき, $f(u)$ は

$$f(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) \tag{a2}$$

である。この場合 $n = 1, 2, 3, \dots$ として

$$E[(\xi^k)^{2n-1}] = 0 \tag{a3}$$

$$E[(\xi^k)^{2n}] = 1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-3)(2n-1) \tag{a4}$$

である。 $f(u)$ は偶関数なので奇数次のモーメントが 0 であることは自明である。そこで、偶数次のモーメント (a4) が成り立つことを示す。等式 (全確率が 1)

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du = 1 \quad (a5)$$

の積分において、 $u = \sqrt{\lambda}v$ (λ は非負定数) とおくと

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{v^2}{2}\lambda\right) dv &= 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{v^2}{2}\lambda\right) dv &= \lambda^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

両辺を λ について n 回微分すると

$$\begin{aligned} \left(-\frac{1}{2}\right)^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (v^2)^n \exp\left(-\frac{v^2}{2}\lambda\right) dv \\ = \left(-\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{1}{2}-1\right) \cdots \left(-\frac{1}{2}-n+1\right) \lambda^{-\frac{1}{2}-n} \end{aligned}$$

したがって、 $\lambda = 1$ とおけば

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} v^{2n} \exp\left(-\frac{v^2}{2}\right) dv = 1 \cdot 3 \cdots (2n-1)$$

左辺は $E[(\xi^k)^{2n}]$ であるから (a4) が成り立つ。

逆に、関数 $f(u)$ に対してモーメントが (a3), (a4) であるとき、関数 $f(u)$ が (a2) であること、すなわち正規分布であることを示す。ただし

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(u) du = 1 \quad (a6)$$

とする。 $f(u)$ のフーリエ変換

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \exp(i\omega u) du \quad (a7)$$

および逆変換

$$f(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \exp(-i\omega u) d\omega \quad (a8)$$

を考える。(a6), (a7) より

$$F(0) = 1 \quad (a9)$$

である。(a7) の両辺を ω について s 回微分すると

$$F^{(s)}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} (i\omega)^s f(u) \exp(i\omega u) du$$

となるので

$$F^{(s)}(0) = i^s \int_{-\infty}^{\infty} u^s f(u) du = i^s E[(\xi^k)^s]$$

である。(a3), (a4) より

$$F^{(2n-1)}(0) = 0 \quad (a10)$$

および

$$F^{(2n)}(0) = (-1)^n \cdot 1 \cdot 3 \cdots (2n-1) \quad (a11)$$

を得る。したがって、 $F(\omega)$ のテイラー展開

$$F(\omega) = F(0) + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{F^{(s)}(0)\omega^s}{s!} \quad (a12)$$

より

$$\begin{aligned} F(\omega) &= F(0) \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F^{(2n-1)}(0)\omega^{2n-1}}{(2n-1)!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F^{(2n)}(0)\omega^{2n}}{(2n)!} \\ &= 1 + 0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 1 \cdot 3 \cdots (2n-1) \cdot \omega^{2n}}{(2n)!} \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1) \cdot (-\omega^2)^n}{1 \cdot 3 \cdots (2n-1) \times 2 \cdot 4 \cdots (2n)} \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(-\frac{\omega^2}{2}\right)^n \end{aligned}$$

ここで

$$\exp(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (a13)$$

に注意すると

$$F(\omega) = \exp\left(-\frac{\omega^2}{2}\right) \quad (a14)$$

を得る。(a8), (a14) より

$$f(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{\omega^2}{2} - i\omega u\right) d\omega \quad (a15)$$

(a15) を変形した式

$$f(u) = \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{(\omega + iu)^2}{2}\right\} d\omega \quad (a16)$$

を考える。複素関数 $\exp\left(-\frac{z^2}{2}\right)$ ($z = x + iy$) は正則であるから、複素平面 (z 平面) 上の 4 点

$$z = -r + 0i, r + 0i, r + ui, -r + ui$$

を頂点とする長方形の閉曲線 C において複素積分

$$\int_C \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz = 0$$

である。すなわち

$$\begin{aligned} & \int_{-r}^r \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx \\ & + i \int_0^u \exp\left\{-\frac{(r+iy)^2}{2}\right\} dy \\ & + \int_r^{-r} \exp\left\{-\frac{(x+iu)^2}{2}\right\} dx \\ & + i \int_u^0 \exp\left\{-\frac{(-r+iy)^2}{2}\right\} dy \\ & = 0 \end{aligned}$$

第2項目および第4項目の積分はそれぞれ

$$\begin{aligned} & \left| i \int_0^u \exp\left\{-\frac{(r+iy)^2}{2}\right\} dy \right| \\ & \leq \int_0^{|u|} \left| \exp\left(-\frac{r^2}{2} + iry\right) \right| |dy| \\ & = \int_0^{|u|} \exp\left(-\frac{r^2}{2}\right) |dy| \\ & = |u| \exp\left(-\frac{r^2}{2}\right) \rightarrow 0 \quad (r \rightarrow \infty) \\ & \left| i \int_u^0 \exp\left\{-\frac{(r+iy)^2}{2}\right\} dy \right| \\ & \leq \int_0^{|u|} \left| \exp\left(-\frac{r^2}{2} + iry\right) \right| |dy| \\ & = \int_0^{|u|} \exp\left(-\frac{r^2}{2}\right) |dy| \\ & = |u| \exp\left(-\frac{r^2}{2}\right) \rightarrow 0 \quad (r \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

となるので

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{(x+iu)^2}{2}\right\} dx \\ & = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx \\ & = \sqrt{2\pi} \end{aligned}$$

ここで積分 (a5) を用いた。ゆえに (a16) より

$$f(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right)$$

となる。

付録 B 連立方程式 (12), (14) の解

連立方程式 (12) の解：

$$\begin{cases} 2P_1 + 2P_2 = 1 & \cdots (a) \\ 2a_1^2 P_1 + 2a_2^2 P_2 = 1 & \cdots (b) \\ 2a_1^4 P_1 + 2a_2^4 P_2 = 3 & \cdots (c) \\ 2a_1^6 P_1 + 2a_2^6 P_2 = 15 & \cdots (d) \end{cases} \quad (b1)$$

$a_1^2 P_1 = a_2^2 P_2$ と仮定して解を探す。このとき (b) より

$$a_1^2 P_1 = a_2^2 P_2 = \frac{1}{4} \quad (b2)$$

また, (c), (d) は

$$\begin{cases} a_1^2 + a_2^2 = 6 \\ a_1^4 + a_2^4 = 30 \end{cases} \quad (b3)$$

この連立方程式から a_2 を消去すれば

$$\begin{aligned} & a_1^4 + (6 - a_1^2)^2 = 30 \\ & a_1^4 - 6a_1^2 + 3 = 0 \\ & a_1^2 = 3 \pm \sqrt{6} \\ & a_2^2 = 3 \mp \sqrt{6} \end{aligned}$$

したがって $0 < a_1 < a_2$ とすれば, 解は

$$a_1 = \sqrt{3 - \sqrt{6}}, \quad a_2 = \sqrt{3 + \sqrt{6}} \quad (b4)$$

また (b2) より

$$\begin{cases} P_1 = \frac{1}{4(3 - \sqrt{6})} = \frac{3 + \sqrt{6}}{12} \\ P_2 = \frac{1}{4(3 + \sqrt{6})} = \frac{3 - \sqrt{6}}{12} \end{cases} \quad (b5)$$

これらの値は連立方程式 (b1) の (a) を満たす。

連立方程式 (14) の解：

$$\begin{cases} P_0 + 2P_1 + 2P_2 = 1 & \cdots (a) \\ 2a_1^2 P_1 + 2a_2^2 P_2 = 1 & \cdots (b) \\ 2a_1^4 P_1 + 2a_2^4 P_2 = 3 & \cdots (c) \\ 2a_1^6 P_1 + 2a_2^6 P_2 = 15 & \cdots (d) \\ 2a_1^8 P_1 + 2a_2^8 P_2 = 105 & \cdots (e) \end{cases} \quad (b6)$$

$a_1^4 P_1 = a_2^4 P_2$ と仮定して解を探す。このとき (c) より

$$a_1^4 P_1 = a_2^4 P_2 = \frac{3}{4} \quad (b7)$$

また, (d), (e) は

$$\begin{cases} a_1^2 + a_2^2 = 10 \\ a_1^4 + a_2^4 = 70 \end{cases} \quad (b8)$$

この連立方程式から a_2 を消去すれば

$$\begin{aligned} & a_1^4 + (10 - a_1^2)^2 = 70 \\ & a_1^4 - 10a_1^2 + 15 = 0 \\ & a_1^2 = 5 \pm \sqrt{10} \\ & a_2^2 = 5 \mp \sqrt{10} \end{aligned}$$

したがって $0 < a_1 < a_2$ とすれば, 解は

$$\begin{cases} a_1 = \sqrt{5 - \sqrt{10}} \\ a_2 = \sqrt{5 + \sqrt{10}} \end{cases} \quad (b8)$$

また (b7) より

$$\begin{cases} P_1 = \frac{3}{4(5 - \sqrt{10})^2} = \frac{7 + 2\sqrt{10}}{60} \\ P_2 = \frac{3}{4(5 + \sqrt{10})^2} = \frac{7 - 2\sqrt{10}}{60} \end{cases} \quad (b9)$$

さらに連立方程式 (b6) の (a) より

$$P_0 = \frac{8}{15} \quad (b10)$$

これらの値は連立方程式 (b6) の (b) を満たす。

付録 C 標準正規乱数での安定領域

標準正規乱数での実現解 (23), (24) では

$$\begin{aligned} E[(R^k)^2] &= E[\exp(-2p + 2\sqrt{q}\xi^k)] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-2p + 2\sqrt{q}u - \frac{u^2}{2}\right) du \\ &= \exp(-2p + 2q) \\ &\quad \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2}(u - 2\sqrt{q})^2\right\} du \\ &= \exp(-2p + 2q) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{v^2}{2}\right) dv \\ &= \exp(-2p + 2q) < 1 \end{aligned}$$

より, 安定領域を表す不等式は

$$q < p \quad (c1)$$

となる。即ち, 直線 $q = p$ と p 軸で挟まれた領域 (境界線を含まない) が安定領域となる。

Multi-Point Distributed Random Variables and Stability Region for the Realized Exact Solution of a Linear Stochastic Differential Equation

Yuji ISHIMORI

Department of Liberal Arts and Sciences, Faculty of Engineering

Summary

We construct $(n + 1)$ -point distributed random variable such that it has the s -th moment ($s = 2, 4, \dots, 2n$) which is equal to that of the Gaussian random variable and study the stability region for the realized exact solution of a linear stochastic differential equation.

Key Words: stochastic differential equation, multi-point random variable, moment, Gaussian random variable, stability region, realized exact solution