人生いろいろ，線素もいろいろ

戸田 晃一・ 兪 成周
（工学部 教養教育）

Sarma-Patgiri による線素を仮定することで非線形偏微分方程式を導出する手法 [1] の紹介および簡単な考察を行う．

キーワード: Einstein 方程式，線素，非線形偏微分方程式

1. はじめに

最近，久しぶりに Einstein 方程式に関連する計算をしている．とにかくテンソル計算は面倒である．10 年前であれば，まだ集中力もあり計算間違いをすることもなかったが，今は間違わずに計算し終わることがほとんどなくなった．必ずどこかで間違えている．数式処理ソフトウェア（例えば，Wolfram Research 社の *Mathematica 10*）を援用したとしても，その結果を信用できずに結局は手計算をし，そして間違える...，その繰り返しである．本研究において最終的に行いたい考察を実際いつ頃行えるのか，全く見当がつかない....

4 次元時空線素を仮定することで $(1+1)$ 次元非線形偏微分方程式を導出し，その非線形偏微分方程式がもつ厳密解を用いて時空構造の性質を考察するという，Sarma-Patgiri による論文 [1] がある．　この論文を最初に見たときの印象は非常に**怪しい**というものであった[*1]．このような怪しい論文には非常に惹かれるものがある．2015 年は一般相対性理論誕生 100 周年，特殊相対性理論誕生 110 周年ということも手伝って，彼らの仕事を勉強し，それを高次元に拡張することで高次元非線形偏微分方程式[*2] に関する研究を行うことにした．

今回は，彼らの論文 [1] の前半部分である，4 次元時空線素を仮定することで非線形偏微分方程式を導出する手法を紹介し，彼らの結果に関する簡単な考察を報告する．

用いる記号をまとめておく [2, 3, 4, 5]：

- **時空座標**[*3] ：$x^\mu \;\longrightarrow\; (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z)$
- **偏微分演算子**： $\partial_\mu \equiv \dfrac{\partial}{\partial x^\mu}$
- **計量テンソル**：$g_{\mu\nu}(x)$
- **線素**：$\mathrm{d}s^2 = g_{\mu\nu}\, \mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu$
- **接続係数**[*4] ：
  $$\Gamma^\mu_{\nu\lambda}(x) = \frac{1}{2}\, g^{\mu\rho}\left(\partial_\lambda g_{\rho\nu} + \partial_\nu g_{\rho\lambda} - \partial_\rho g_{\nu\lambda}\right)$$
- **Riemann テンソル**：
  $$R^\mu{}_{\nu\lambda\rho} \equiv \partial_\lambda \Gamma^\mu_{\nu\rho} - \partial_\rho \Gamma^\mu_{\nu\lambda} + \Gamma^\mu_{\alpha\lambda}\Gamma^\alpha_{\nu\rho} - \Gamma^\mu_{\alpha\rho}\Gamma^\alpha_{\nu\lambda}$$
- **Ricci テンソル**： $R_{\mu\nu} \equiv g^{\rho\sigma} R_{\sigma\mu\rho\nu} = R^\rho{}_{\mu\rho\nu}$
- **Kronecker のデルタ**：$\delta^\nu_\mu = \begin{cases} 1 & (\mu=\nu) \\ 0 & (\mu \neq \nu) \end{cases}$

---

*1 実は，この印象は今も変わっていない．

*2 高次元非線形偏微分方程式の中でも，非線形可積分方程式に興味がある．

*3 全て「長さ」の次元をもつ．いつものお約束として，以下では，$c = 1$ とする．

*4 $\Gamma^\mu_{\nu\lambda}$ を **Christoffel の（三指標）記号**という．

（注意 1）

同じギリシャ文字の添え字が上下に現れた場合には，その文字について 0 から 3 までの和をとるものとする[*5]．

2. Sarma-Patgiri(2010) による先行研究

4 次元時空線素を仮定することで非線形偏微分方程式を導出する手法（文献 [1] の前半部分）の紹介を（計算の過程をなるべく省略せずに）行う．

$f = f(t,x)$ として, 次の 4 次元時空線素を考える：

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s^2 = & \left(2f_{xx} - af^2\right)\mathrm{d}t^2 + 2\left(\frac{3}{2}\,t\right)^{\frac{4}{3}}\mathrm{d}x^2 \\ & -2f\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x + \mathrm{d}y^2 + 2\left(\frac{3}{2}\,t\right)^{\frac{2}{3}}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ & +\mathrm{d}t\,\mathrm{d}z. \end{aligned} \tag{1}$$

このとき，計量テンソル $g_{\mu\nu}(x)$ は

$$g_{\mu\nu}(x) = \begin{bmatrix} A & -f & 0 & \frac{1}{2} \\ -f & 2B^2 & B & 0 \\ 0 & B & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2}$$

である．ここで,

$$A = 2f_{xx} - af^2, \quad B = \left(\frac{3}{2}t\right)^{\frac{2}{3}} \tag{3}$$

とする.

$$\begin{aligned} \det g_{\mu\nu}(x) &= -\frac{1}{2}\begin{vmatrix} -f & 2B^2 & B \\ 0 & B & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{vmatrix} \\ &= -\frac{1}{4}B^2 \end{aligned} \tag{4}$$

より，$g_{\mu\lambda}g^{\lambda\nu} = \delta_\mu^\nu$ を満たす $g^{\mu\nu}(x)$ は

$$\begin{aligned} & g^{\mu\nu}(x) \\ & = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & B^{-2} & B^{-1} & 2fB^{-2} \\ 0 & -B^{-1} & 2 & -2fB^{-1} \\ 2 & 2fB^{-2} & -2fB^{-1} & -4A + 4f^2B^{-2} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{5}$$

となる.

[*5] これを，**Einstein の和法則（規約，縮約）**という.

次に，接続係数 $\Gamma^\mu_{\nu\lambda}$ を計算する：

$$\begin{aligned} \Gamma^0_{00}(x) &= \frac{1}{2}\,g^{0\rho}\left(\partial_0 g_{\rho 0} + \partial_0 g_{\rho 0} - \partial_\rho g_{00}\right) \\ &= \frac{1}{2}\,g^{0\rho}\left(2\partial_0 g_{\rho 0} - \partial_\rho g_{00}\right) \\ &= \frac{1}{2}\,g^{00}\left(2g_{00} - \partial_0 g_{00}\right) \\ &\quad + \frac{1}{2}\,g^{01}\left(2\partial_0 g_{10} - \partial_1 g_{00}\right) \\ &\quad + \frac{1}{2}\,g^{02}\left(2\partial_0 g_{20} - \partial_2 g_{00}\right) \\ &\quad + \frac{1}{2}\,g^{03}\left(2\partial_0 g_{30} - \partial_3 g_{00}\right) \\ &= 0 \end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned} \Gamma^1_{00}(x) &= \frac{1}{2}\,g^{1\rho}\left(\partial_0 g_{\rho 0} + \partial_0 g_{\rho 0} - \partial_\rho g_{00}\right) \\ &= \frac{1}{2}\,g^{0\rho}\left(2\partial_0 g_{\rho 0} - \partial_\rho g_{00}\right) \\ &= \frac{1}{2}\,g^{10}\left(2g_{00} - \partial_0 g_{00}\right) \\ &\quad + \frac{1}{2}\,g^{11}\left(2\partial_0 g_{10} - \partial_1 g_{00}\right) \\ &\quad + \frac{1}{2}\,g^{12}\left(2\partial_0 g_{20} - \partial_2 g_{00}\right) \\ &\quad + \frac{1}{2}\,g^{13}\left(2\partial_0 g_{30} - \partial_3 g_{00}\right) \\ &= \frac{1}{2}\,g^{11}\left(2\partial_0 g_{10} - \partial_1 g_{00}\right) \\ &= -\frac{1}{2}\,B^{-2}\left(2f_t + A_x\right) \end{aligned} \tag{7}$$

ここで, 添え字はその文字での偏微分を意味する（以下同様）．残りも同様に計算することで,

$$\Gamma^2_{00} = \frac{1}{2}B^{-1}\left(2f_t + A_x\right) \tag{8}$$

$$\Gamma^3_{00} = A_t - 2ff_tB^{-2} - fA_xB^{-2} \tag{9}$$

$$\Gamma^1_{01} = t^{-1} \tag{10}$$

$$\Gamma^1_{20} = \frac{1}{3}\left(tB\right)^{-1} \tag{11}$$

$$\Gamma^2_{01} = B_t \tag{12}$$

$$\Gamma^2_{20} = -\frac{1}{3}t^{-1} \tag{13}$$

そして,

$$\begin{aligned} \Gamma^0_{01} &= \Gamma^0_{02} = \Gamma^0_{03} \\ &= \Gamma^1_{11} = \Gamma^1_{21} = \Gamma^1_{31} = \Gamma^1_{30} \\ &= \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{22} = \Gamma^2_{30} = \Gamma^2_{32} \\ &= \Gamma^3_{03} = \Gamma^3_{13} = \Gamma^3_{23} = \Gamma^3_{33} \\ &= 0 \end{aligned} \tag{14}$$

を得る．

よって，Ricci テンソルの R_{00} を計算すると，

$$\begin{aligned}
R_{00} &= R^0{}_{000} + R^1{}_{010} + R^2{}_{020} + R^3{}_{030} \\
&= \partial_0\Gamma^0_{00} - \partial_0\Gamma^0_{00} + \Gamma^0_{00}\Gamma^0_{00} + \Gamma^0_{10}\Gamma^1_{00} \\
&\quad +\Gamma^0_{20}\Gamma^2_{00} + \Gamma^0_{30}\Gamma^3_{00} - \Gamma^0_{00}\Gamma^0_{00} - \Gamma^0_{10}\Gamma^1_{00} \\
&\quad -\Gamma^0_{20}\Gamma^2_{00} - \Gamma^0_{30}\Gamma^3_{00} \\
&\quad +\partial_1\Gamma^1_{00} - \partial_1\Gamma^0_{01} + \Gamma^1_{01}\Gamma^0_{00} + \Gamma^1_{11}\Gamma^1_{00} \\
&\quad +\Gamma^1_{21}\Gamma^2_{00} + \Gamma^1_{31}\Gamma^3_{00} - \Gamma^1_{00}\Gamma^0_{01} - \Gamma^1_{10}\Gamma^1_{01} \\
&\quad -\Gamma^1_{20}\Gamma^2_{01} - \Gamma^1_{30}\Gamma^3_{01} \\
&\quad +\partial_2\Gamma^2_{00} - \partial_0\Gamma^2_{02} + \Gamma^2_{02}\Gamma^0_{00} + \Gamma^2_{12}\Gamma^1_{00} \\
&\quad +\Gamma^2_{22}\Gamma^2_{00} + \Gamma^2_{32}\Gamma^3_{00} - \Gamma^2_{00}\Gamma^0_{02} - \Gamma^2_{10}\Gamma^1_{02} \\
&\quad -\Gamma^2_{20}\Gamma^2_{02} - \Gamma^2_{30}\Gamma^3_{02} \\
&\quad +\partial_3\Gamma^3_{00} - \partial_0\Gamma^3_{03} + \Gamma^3_{03}\Gamma^0_{00} + \Gamma^3_{13}\Gamma^1_{00} \\
&\quad +\Gamma^3_{23}\Gamma^2_{00} + \Gamma^3_{33}\Gamma^3_{00} - \Gamma^3_{00}\Gamma^0_{03} - \Gamma^3_{10}\Gamma^1_{03} \\
&\quad -\Gamma^3_{20}\Gamma^2_{03} - \Gamma^3_{30}\Gamma^3_{03} \\
&= \partial_1\Gamma^1_{00} - \partial_0\Gamma^1_{01} - \partial_0\Gamma^2_{02} - \Gamma^1_{10}\Gamma^1_{01} \\
&\quad -\Gamma^1_{20}\Gamma^2_{01} - \Gamma^2_{10}\Gamma^1_{02} - \Gamma^2_{20}\Gamma^2_{02} \\
&= -B^{-2}\left[f_t - aff_x + f_{xxx}\right]_x \qquad (15)
\end{aligned}$$

となる．同様に計算すると，

$$R_{\mu\nu} = 0 \quad (\mu = \nu = 0 \text{ 以外}) \qquad (16)$$

であることが分かる．

以上より，真空における Einstein 方程式：

$$R_{\mu\nu} = 0 \qquad (17)$$

は，

$$f_t - aff_x + f_{xxx} = 0 \qquad (18)$$

と等価である[*6]．非線形偏微分方程式 (18) は，Korteweg-de Vries (KdV) 方程式とよばれる．KdV 方程式 (18) は可積分でありソリトン（孤立波）解をもつことが知られている [6, 7, 8, 9, 10, 11]．

（注意 2）

(3) の A を用いると，KdV 方程式 (18) は

$$\partial_t(2f) = \partial_x A. \qquad (19)$$

と書き直すことができる．これは，A を**流束**，$2f$ を**保存密度**とする保存則の形である [6, 10]．

*6 より正確には，$f_t - aff_x + f_{xxx} = C(t)$ と右辺は，x に依存しない任意関数 $C(t)$ とすべきであるが，これは変数変換により取り去ることができるので，ここでは $C(t) = 0$ とした。

（注意 3）

Ricci スカラー（スカラー曲率） $\mathcal{R}$ は，

$$\mathcal{R} = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} = 0 \times R_{00} + \underset{(\mu=\nu=0\text{ 以外})}{g^{\mu\nu} \times 0} = 0$$

である．

3. 簡単な考察

前節の**（注意 2）**より，次のことがいえる．

$u = u(t,x)$ として，次の 4 次元時空線素を考える：

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}s^2 &= F\mathrm{d}t^2 + 2\left(\frac{3}{2}t\right)^{\frac{4}{3}}\mathrm{d}x^2 - u\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x + \mathrm{d}y^2 \\
&\quad +2\left(\frac{3}{2}t\right)^{\frac{2}{3}}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \mathrm{d}t\,\mathrm{d}z. \qquad (20)
\end{aligned}$$

計量テンソル $g_{\mu\nu}(x)$ は

$$g_{\mu\nu}(x) = \begin{bmatrix} F & -\frac{1}{2}u & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2}u & 2\left(\frac{3}{2}t\right)^{\frac{4}{3}} & \left(\frac{3}{2}t\right)^{\frac{2}{3}} & 0 \\ 0 & \left(\frac{3}{2}t\right)^{\frac{2}{3}} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (21)$$

である．このとき，真空における Einstein 方程式

$$R_{\mu\nu} = 0 \qquad (22)$$

より，保存則の形をした $(1+1)$ 次元偏微分方程式：

$$\partial_t u = \partial_x F. \qquad (23)$$

が導出される．例えば，

- $F = \alpha u_x - \beta u^n \implies$ Burgers 方程式系列
- $F = \alpha u_{xx} - \beta u^n \implies$ KdV 方程式系列
- $F = \alpha u_x - \beta |u|^n \implies$ 非線形 Schrödinger 方程式系列

である．この事実は，文献 [1] では一切触れられていない．

それでは，高次元の場合はどうであろうか？高次元拡張は非常に難しくなる．接続係数 $\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda\rho}$ や Riemann テンソル $R^{\mu}{}_{\nu\lambda\rho}$ の中に x^μ $(\mu = 0, 1, 2, 3)$ の偏微分が入っているので，単純な高次元化（例えば，$u = u(t, x, y)$ とするなど）は計算が破綻する．本質的に，計量テンソル $g_{\mu\nu}$ の構造を変更する必要がある．現在，その変更に苦戦中である．（前節の計算量の何倍にもなり，なかなか進まない.）

4 次元時空のままでの計算では上述した通り，なかなか計算が進まない．理論物理学（特に，素粒子論や場の理論）の研究において，次元を増やすというのがこの手の問題に対する解決の糸口になる場合は多い [12, 13]．具体的には，6 次元時空や 8 次元時空がその候補となる．実はこの観点での研究が，Dryuma により行われている [14, 15, 16, 17]．しかし，この Dryuma が提案している線素 と Sarma-Patgiri が提案している線素 (1) は，現時点では関連付けられるのかどうかは全くの不明である．これらの関係の解明は非常に重要である．

4. まとめ

今回は，[1] の前半部分の計算をなるべく詳細に紹介し，簡単な考察を行った．

Sarma-Patgiri の仕事 と Dryuma の仕事を精査し，（できれば 4 次元時空のままで,）高次元非線形偏微分方程式導出の処方箋を発見することを当面の目標に本研究を進めていく．

謝 辞

平成 26 年度富山第一銀行奨学財団「研究活動及び設備等に対する助成」を受けて，本研究の一部は行われた．

著者の一人（KT）は，以下の三氏：

森山 信彦氏（フルハルター），
吉宗 史博氏（Pen and message.），
和田 哲哉氏（信頼文具舗）

に，いつも使い易い文具を提供してくれていることを感謝する．

最後に，研究のためとはいえ，頻繁に自宅を留守にすることをいつも寛容に認めてくれる（互いの）家族に感謝する．

付 録

【有用な公式】

- $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \Gamma^{\lambda}_{\nu\mu}$
- $R_{\lambda\mu\nu\rho} = R_{\nu\rho\lambda\mu}$
- $R_{\lambda\mu\nu\rho} = -R_{\mu\lambda\nu\rho} = -R_{\lambda\mu\rho\nu} = R_{\mu\lambda\rho\nu}$
- $R_{\lambda\mu\nu\rho} + R_{\lambda\rho\mu\nu} + R_{\lambda\nu\rho\mu} = 0$
- $R_{\mu\nu} = R_{\nu\mu}$

【補足】

共変ベクトル $A_\mu(x)$ に対する共変微分 ∇_λ を，

$$\nabla_\lambda A_\mu(x) \equiv \partial_\nu A_\mu(x) - \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} A_\lambda(x)$$

とする．このとき，次の恒等式：

$$\begin{aligned}([\nabla_\lambda, [\nabla_\mu, \nabla_\nu]] + [\nabla_\mu, [\nabla_\nu, \nabla_\lambda]] \\ + [\nabla_\nu, [\nabla_\lambda, \nabla_\mu]]) A_\rho = 0\end{aligned}$$

が成り立つ．これを，**Bianchi の恒等式**という．Riemann テンソルを用いて，

$$\nabla_\lambda R^{\sigma}{}_{\rho\nu\mu} + \nabla_\mu R^{\sigma}{}_{\rho\lambda\nu} + \nabla_\nu R^{\sigma}{}_{\rho\mu\lambda} = 0$$

と書き直すことができる．

これらの公式の導出，使い方，物理的な意味については，例えば 文献 [5][*7] を参照してほしい．

*7 初習者でも分かりやすい文献である．

参考文献

[1] D. Sarma ・M. Patgir (2010):
arXiv:1003.2678[nlin.SI].

[2] C. W. Misner・K. S. Thorne
・J. A. Wheeler(1973)：
Gravitation,
ISBN: 978-0716703440,
W H Freeman & Co.

[3] 冨田憲二 (1990):
相対性理論,
ISBN: 978-4621034774,
講談社.

[4] 佐藤文隆・小玉英雄 (2000)：
一般相対性理論,
ISBN: 978-4000067423,
岩波書店.

[5] 窪田高弘・佐々木隆 (2001)：
相対性理論,
ISBN: 978-4785320973,
裳華房.

[6] P. G. Drazin・R. S. Johnson(1989)：
Solitons: An Introduction,
ISBN: 978-0521336550,
Cambridge University Press.

[7] M. A. Ablowitz・P. A. Clarkson (1992)：
Solitons, Nonlinear Evolution Equations and Inverse Scattering,
ISBN: 978-0521387309,
Cambridge University Press.

[8] 金子晃 (1998)：
偏微分方程式入門,
ISBN: 978-4130629034,
東京大学出版会.

[9] 戸田盛和 (1995)：
波動と非線形問題 30 講,
ISBN: 978-4254136333,
朝倉書店.

[10] 和達三樹 (2000)：
非線形波動,
ISBN: 978-4000067416,
岩波書店.

[11] 大宮眞弓 (2008)：
非線形波動の古典解析,
ISBN: 978-4627076211,
森北出版.

[12] Rodolfo Martini(1985):
Geometric Aspects of the Einstein Equations and Integrable Systems,
ISBN: 978-3540160397,
Springer.

[13] 橋本幸士 (2006)：
D ブレーン—超弦理論の高次元物体が描く世界像,
ISBN: 978-4130641012,
東京大学出版会.

[14] V. Dyuma(1996)：
arXiv:gr-qc/0601051.

[15] V. Dyuma(2008)：
arXiv:0810.0346[nlin.SI].

[16] V. Dyuma(2012)：
arXiv:1206.4243[physics.gen-ph].

[17] V. Dyuma(2014)：
arXiv:1411.0930[math.DG].

A very brief review of nonlinear partial differential equations in the Einstein vacuum field equations

Kouichi TODA and YU Seongju *

Summary

We briefly review a trial study of nonlinear partial differential equations in the vacuum field equations of Einstein with line elements, such as

$$\mathrm{d}s^2 = -\left[a^2(t,x) - 2f_{xx}(t,x)\right]\mathrm{d}t^2 + 2\left(\frac{3}{2}t\right)^{\frac{4}{3}}\mathrm{d}x^2 - 2f(t,x)\mathrm{d}t\mathrm{d}x + \mathrm{d}y^2 + 2\left(\frac{3}{2}t\right)^{\frac{2}{3}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \mathrm{d}t\mathrm{d}z$$

with a being an arbitrary constant given by Sarma and Patgiri (2010).

Key Words: *Einstein's vacuum field equations*, *metric*, *nonlinear partial differential equations*

* Department of Liberal Arts and Sciences, Faculty of Engineering, Toyama Prefectural University