平面波を初期値とするゲージ不変な非線型発展方程式の特殊解とその時間大域的挙動について

土井　一幸
(工学部教養教育)

本稿では, [2] の補足として, 平面波を初期値とするゲージ不変な非線型発展方程式の特殊解を初等的な方法によって求める. また, その時間大域的挙動を求める.

キーワード: 非線型発展方程式, ゲージ不変性, 平面波, 大域解, 爆発解

1. 序

次のような非線型発展方程式を考える:

$$\partial_t u + \mathcal{L}u = \lambda\mathcal{N}((\partial_x^\alpha u)_{|\alpha|\le l}, \partial_x^\nu u), \quad (t,x) \in (0,\infty)\times\mathbf{R}^n, \tag{1}$$

ただし, $n \ge 1, \partial_t = \partial/\partial t, \lambda \in \mathbf{C}\setminus\{0\}, l \in \mathbf{Z}_+, \nu \in \mathbf{Z}_+^n$ とし, 未知関数 $u = u(t,x)$ は複素数値であるとする. ここで, $\mathbf{Z}_+$ は非負整数全体の集合とする. また, 線型微分作用素 $\mathcal{L}\colon \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n) \to \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$ は

$$\mathcal{L}u = \mathcal{F}^{-1}[P(\xi)\mathcal{F}[u](\xi)], \quad u \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$$

と定める, ただし, $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$ は $\mathbf{R}^n$ 上の緩増加超関数全体からなる空間とし, $\mathcal{F}$ は $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$ 上のフーリエ変換, P は緩増加関数 (すなわち, $P \in C^\infty(\mathbf{R}_\xi^n)$ であり, 任意の多重指数 $\alpha \in \mathbf{Z}_+^n$ に対してある $N(\alpha) \in \mathbf{Z}_+$ が存在して

$$\sup_{\xi\in\mathbf{R}^n} (1+|\xi|)^{-N(\alpha)}|\partial_\xi^\alpha P(\xi)| < \infty$$

となるもの) とする. 非線型関数 $\mathcal{N}\colon \mathbf{C}^{l^*}\times\mathbf{C} \to \mathbf{C}$ は

$$\mathcal{N}((v^\alpha)_{|\alpha|\le l}, w) = \prod_{|\alpha|\le l} |v^\alpha|^{k_\alpha} w, \quad ((v^\alpha)_{|\alpha|\le l}, w) \in \mathbf{C}^{l^*}\times\mathbf{C}$$

と定める, ただし, $k_\alpha \ge 0$ ($\alpha \in \mathbf{Z}_+^n, |\alpha| \le l$),

$$l^* = \sum_{j=0}^{l} \binom{n+j-1}{n-1} = \sum_{j=0}^{l} \frac{(n+j-1)!}{(n-1)!\,j!}$$

とする.

方程式 (1) はゲージ不変性を持つことに注意する. ここで, 方程式がゲージ不変性を持つということを次のように定義している: u を考えている方程式の解とするとき, 任意の $\theta \in \mathbf{R}$ に対して $e^{i\theta}u$ もその方程式の解となる.

方程式 (1) は多くの例を含む. 例えば, $P(\xi) = \gamma|\xi|^2 + \kappa$ ($\gamma, \kappa \in \mathbf{C}$) とすれば $\mathcal{L} = -\gamma\Delta + \kappa$ となり, このときには (1) は複素ギンツブルグ・ランダウ方程式となる. 特に, $P(\xi) = |\xi|^2$ のときは非線型熱方程式に, $P(\xi) = i|\xi|^2$ のときは非線型シュレディンガー方程式となる. その他, $n = 1$, $P(\xi) = -i\xi^3$, とすれば, (1) の左辺は KdV 方程式の線型部分となる. なお, 第 3 節にいくつかの例を掲載した.

本稿では, 初期値として平面波を与えたときの方程式 (1) の特殊解の振る舞いについて考える. 具体的には, $\mu \in \mathbf{C}$, $a \in \mathbf{R}^n$ を与え, 初期値として

$$u(0,x) = \mu E_a(x), \quad x \in \mathbf{R}^n \tag{2}$$

を考える, ただし, $E_a(x) = e^{ia\cdot x}$ ($x \in \mathbf{R}^n$) とする[*1].

この問題は [2] において扱われ, (1)–(2) の特殊解の陽的表示及びその時間大域的挙動が (有限時刻爆発も含めて) 得られた. そこでは, $\nu = (0,\ldots,0)$ として, $l = 0$, $k_{(0,\ldots,0)} = p-1$ ($p > 1$) の場合, すなわち

$$\mathcal{N}(v,w) = |v|^{p-1}w, \quad (v,w) \in \mathbf{C}^1\times\mathbf{C}$$

の場合について言及された ([2, Theorem 2.1, 2.2]). また, 非線型項がより一般的な形の場合の取り扱いについ

[*1] 方程式 (1) がゲージ不変性をもつことから, 実は μ を非負の実数に制限しても一般性を失わないことに注意されたい. しかし, 定理を述べる場合に μ の及ぼす影響を見やすくするため, 本稿では敢えて μ を複素数とすることとした.

ても, その概略が具体例を通して述べられている. しかし, 詳細な記述は省かれている. そこで本稿では, これを補う形で, その部分について述べる (第 2 節の定理 1, および定理 2). さらに第 3 節では, (上の例も含めて) $\mathcal{L}$ や $\nu, \mathcal{N}$ の典型的と思われる例を与え, そのときに定理 1, 2 がどのように対応するかを述べる.

結果を述べるため, $b \in \mathbf{R}^n$ に対して, $U_b = U_b^P(t,x)$ を次の問題の解とする:

$$\begin{cases} \partial_t u + \mathcal{L}u = 0, & (t,x) \in (0,\infty) \times \mathbf{R}^n, \\ u(0,x) = E_b(x), & x \in \mathbf{R}^n. \end{cases}$$

この解 U_b は, 次の関係式

$$\mathcal{L}E_b = P(b)E_b \quad \text{in} \quad \mathcal{S}'$$

を用いることで,

$$U_b(t,x) = e^{-P(b)t}E_b(x) = e^{-\mathrm{Re}P(b)t}e^{i(b\cdot x - \mathrm{Im}P(b)t)}$$

であることがわかる. また, これより $U_b \in C^\infty([0,\infty)\times \mathbf{R}^n)$ である

また, 方程式 (1) の右辺に現れる非線型関数 $\mathcal{N}$ と初期値 (2) に現れる a から決まる量 $\omega = \omega(\mathcal{N}, a) \in \mathbf{R}$ を

$$\omega = a^\nu \prod_{|\alpha|\le l} |a^\alpha|^{k_\alpha}$$

と定める[*2].

2.　主結果およびその証明

定理 1 (局所解の存在)**.** $K = \sum_{|\alpha|\le l} k_\alpha$ とし, $K > 0$ と仮定する. このとき, ある $T > 0$ が存在して

(3)
$$A(t) = \begin{cases} \mu F(t)^{-\frac{i^{|\nu|}\lambda}{K\mathrm{Re}(i^{|\nu|}\lambda)}} \\ \qquad (\mathrm{Re}P(a) \neq 0, \mathrm{Re}(i^{|\nu|}\lambda) \neq 0 \text{ のとき}), \\ \mu \exp G(t) \\ \qquad (\mathrm{Re}P(a) \neq 0, \mathrm{Re}(i^{|\nu|}\lambda) = 0 \text{ のとき}), \\ \mu(1 - K\omega\mathrm{Re}(i^{|\nu|}\lambda)|\mu|^K t)^{-\frac{i^{|\nu|}\lambda}{K\mathrm{Re}(i^{|\nu|}\lambda)}} \\ \qquad (\mathrm{Re}P(a) = 0, \mathrm{Re}(i^{|\nu|}\lambda) \neq 0 \text{ のとき}), \\ \mu \exp(i^{|\nu|}\lambda\omega|\mu|^K t) \\ \qquad (\mathrm{Re}P(a) = 0, \mathrm{Re}(i^{|\nu|}\lambda) = 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

とすると

(4)　$u(t,x) = A(t)U(t,x) \ \big(\in C^\infty([0,T) \times \mathbf{R}^n)\big)$

は (1)–(2) の解となる, ただし $F, G\colon [0,\infty) \to \mathbf{R}$ を

$$F(t) = 1 - \frac{\omega\mathrm{Re}(i^{|\nu|}\lambda)|\mu|^K}{\mathrm{Re}P(a)}(1 - e^{-K\mathrm{Re}P(a)t}),$$
$$G(t) = \frac{i^{|\nu|}\lambda\omega|\mu|^K}{K\mathrm{Re}P(a)}(1 - e^{-K\mathrm{Re}P(a)t})$$

とし, ω は (3) で与えられるものとする.

注意 1. 定理 1 において, $K = 0$ の場合は (1) が線型問題となるために主張の対象から除外されているが, (4) の形で解を表そうとすれば (3) における 4 つ目の場合の表現に含まれることに注意する. 実際, $K = 0$ の場合は $A(t) = \mu\exp(i^{|\nu|}\lambda\omega t)$ とすれば $A(t)U(t,x)$ が (1)–(2) の解である. なお, このときは $\omega = a^\nu$ である. このことは, 後述する定理 1 の証明における (5) からも分かる.

注意 2. [2] における Theorem 2.1, 2.2 は $\mathcal{N}(u,u) = |u|^{p-1}u$ の場合について述べられたものであるが, その主張は定理 1 において $K = p-1$, $\omega = 1$, $\nu = (0,\dots,0)$ としたものに相当する.

定理 1 は (1)–(2) を $A(t)$ についての常微分方程式に帰着することにより示される. このようなアプローチは, Kita [3] のアイディアに依る ([4] も参照されたい).

次に, 定理 1 において得られた $A(t)$ の時間大域的な振る舞いについて述べる. これは (3) から直接計算できる (後述の (7) も参照されたい).

定理 2 (時間大域性)**.** $A(t)$ を (3) で与えられる関数とし, $\mu \neq 0$ とする. このとき, 次が成り立つ:

1. $\omega\mathrm{Re}(i^{|\nu|}\lambda) \le 0$ のとき, $A(t)$ は時間大域的に存在する. さらに, $\omega\mathrm{Re}(i^{|\nu|}\lambda) < 0$ ならば,

$$\lim_{t\to\infty} A(t) = \begin{cases} \mu\Big(1 - \dfrac{\omega\mathrm{Re}(i^{|\nu|}\lambda)|\mu|^K}{\mathrm{Re}P(a)}\Big)^{-\frac{i^{|\nu|}\lambda}{K\mathrm{Re}(i^{|\nu|}\lambda)}} \\ \qquad\qquad (\mathrm{Re}P(a) > 0 \text{ のとき}), \\ 0 \qquad\qquad (\mathrm{Re}P(a) \le 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

が成り立つ.

2. $\omega\mathrm{Re}(i^{|\nu|}\lambda) > 0$ のとき, 次が成り立つ:
   (a) $\mathrm{Re}P(a) \le 0$ ならば, $A(t)$ は次で与えられる

[*2] ω は $\mathcal{N}$ と a の取り方によって 0^0 を因子に持つことがあるが, 本稿では $0^0 = 1$ と定義する.

時刻 $T^* > 0$ において爆発する:

$$T^* = \begin{cases} \log\left(1 - \dfrac{\mathrm{Re}P(a)}{\omega\mathrm{Re}(i^{|\nu|}\lambda)|\mu|^K}\right)^{-\frac{1}{K\mathrm{Re}P(a)}} \\ \qquad\qquad (\mathrm{Re}P(a) < 0 \text{ のとき}), \\ \dfrac{1}{K\omega\mathrm{Re}(i^{|\nu|}\lambda)|\mu|^K} \\ \qquad\qquad (\mathrm{Re}P(a) = 0 \text{ のとき}). \end{cases}$$

(b) $\mathrm{Re}P(a) > 0$ のとき. $|\mu|^K \le \frac{\mathrm{Re}P(a)}{\omega\mathrm{Re}(i^{|\nu|}\lambda)}$ ならば, $A(t)$ は時間大域的に存在する. 一方で, $|\mu|^K > \frac{\mathrm{Re}P(a)}{\omega\mathrm{Re}(i^{|\nu|}\lambda)}$ ならば, $A(t)$ は次で与えられる時刻 $T^* > 0$ において爆発する:

$$T^* = \log\left(1 - \frac{\mathrm{Re}P(a)}{\omega\mathrm{Re}(i^{|\nu|}\lambda)|\mu|^K}\right)^{-\frac{1}{K\mathrm{Re}P(a)}}.$$

定理 1 の証明. (4) を (1)–(2) に代入すると, $A(t)$ について次の常微分方程式を得る:

(5)
$$\begin{cases} \dfrac{dA}{dt} = i^{|\nu|}\lambda\omega e^{-K\mathrm{Re}P(a)t}|A|^K A, \quad t \in (0, T), \\ A(0) = \mu. \end{cases}$$

(5) を解くために (5) の両辺に $\overline{A(t)}$ を掛ける[*3]:

$$\frac{dA}{dt}\overline{A} = i^{|\nu|}\lambda\omega e^{-K\mathrm{Re}P(a)t}|A|^{K+2}.$$

この両辺の実部を取って 2 倍すると

(6) $$\frac{d}{dt}|A(t)|^2 = 2\mathrm{Re}(i^{|\nu|}\lambda)\omega e^{-K\mathrm{Re}P(a)t}|A(t)|^{K+2}$$

である. ここで

$$\frac{d}{dt}\left(|A(t)|^{-K}\right) = -\frac{K}{2|A(t)|^{K+2}}\frac{d}{dt}|A(t)|^2$$

であることに注意すると, (6) から

$$\frac{d}{dt}\left(|A(t)|^{-K}\right) = -K\omega\mathrm{Re}(i^{|\nu|}\lambda)e^{-K\mathrm{Re}P(a)t}$$

を得る. この両辺を積分することにより,

(7)
$$|A(t)|^K = \begin{cases} \dfrac{|\mu|^K}{1 - \dfrac{\omega\mathrm{Re}(i^{|\nu|}\lambda)|\mu|^K}{\mathrm{Re}P(a)}(1 - e^{-K\mathrm{Re}P(a)t})} \\ \qquad\qquad (\mathrm{Re}P(a) \neq 0 \text{ のとき}), \\ \dfrac{|\mu|^K}{1 - K\omega\mathrm{Re}(i^{|\nu|}\lambda)|\mu|^K t} \\ \qquad\qquad (\mathrm{Re}P(a) = 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

が得られる[*4]. あとは (7) を (5) に代入することにより (3) が得られ, 定理 1 が示された. □

[*3] 複素数 z に対して, $\overline{z}$ で z の複素共役を表すこととする.

[*4] なお, (7) の右辺における $\mathrm{Re}P(a) \neq 0$ の場合の量の分母は, 定理 1 の主張の中で $F(t)$ とおいたものである.

3. 例

本節では $\mathcal{L}$ や $\nu, \mathcal{N}$ の典型的と思われる例を与え, そのときに定理 1, 2 がどのように対応するかを述べる.

3.1 複素非線型熱方程式 ([2, Appendix])

$P(\xi) = |\xi|^2$ ($\xi \in \mathbf{R}^n$), $\nu = (0, \ldots, 0)$ とし, $l = 0$, $k_{(0,\ldots,0)} = p - 1$ ($p > 1$) の場合, すなわち

$$\mathcal{N}(v, w) = |v|^{p-1}w, \quad (v, w) \in \mathbf{C}^1 \times \mathbf{C}$$

の場合を考える. このとき, (1) は複素非線型熱方程式

$$\partial_t u - \Delta u = \lambda|u|^{p-1}u, \quad (t, x) \in (0, \infty) \times \mathbf{R}^n$$

となる. このとき, $U(t, x) = e^{-|a|^2 t}e^{ia\cdot x}$ である. また, $K = p - 1, \omega = 1$ であり, 定理 1 における (3) は

$$A(t) = \begin{cases} \mu F(t)^{-\frac{\lambda}{(p-1)\mathrm{Re}\lambda}} \\ \qquad\qquad (a \neq 0, \mathrm{Re}\lambda \neq 0 \text{ のとき}), \\ \mu\exp\left(\dfrac{i\mathrm{Im}\lambda|\mu|^{p-1}}{(p-1)|a|^2}\left(1 - e^{-(p-1)|a|^2 t}\right)\right) \\ \qquad\qquad (a \neq 0, \mathrm{Re}\lambda = 0 \text{ のとき}), \\ \mu\left(1 - (p-1)\mathrm{Re}\lambda|\mu|^{p-1}t\right)^{-\frac{\lambda}{(p-1)\mathrm{Re}\lambda}} \\ \qquad\qquad (a = 0, \mathrm{Re}\lambda \neq 0 \text{ のとき}), \\ \mu\exp(i\mathrm{Im}\lambda|\mu|^{p-1}t) \\ \qquad\qquad (a = 0, \mathrm{Re}\lambda = 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

となる. ここで

$$F(t) = 1 - \frac{\mathrm{Re}\lambda|\mu|^{p-1}}{|a|^2}\left(1 - e^{-(p-1)|a|^2 t}\right)$$

である.

定理 2 の部分は次のようになる. $\mu \neq 0$ とする. $\mathrm{Re}\lambda \le 0$ のとき, $A(t)$ は時間大域的に存在する. さらに, $\mathrm{Re}\lambda < 0$ ならば,

$$\lim_{t\to\infty} A(t) = \begin{cases} \mu\left(1 - \dfrac{\mathrm{Re}\lambda|\mu|^{p-1}}{|a|^2}\right)^{-\frac{\lambda}{(p-1)\mathrm{Re}\lambda}} \\ \qquad (a \neq 0 \text{ のとき}), \\ 0 \qquad (a = 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

が成り立つ. 一方, $\mathrm{Re}\lambda > 0$ の場合は次のようになる. $a \neq 0$ かつ $|\mu|^{p-1} \le |a|^2/\mathrm{Re}\lambda$ ならば, $A(t)$ は時間大域的に存在する. また, "$a \neq 0$ かつ $|\mu|^{p-1} > |a|^2/\mathrm{Re}\lambda$" または $a = 0$ ならば, $A(t)$ は次で与えられる時刻 $T^* > 0$ において爆発する:

$$T^* = \begin{cases} -\dfrac{1}{(p-1)|a|^2}\log\left(1 - \dfrac{|a|^2}{\mathrm{Re}\lambda|\mu|^{p-1}}\right) \\ \qquad (a \neq 0 \text{ かつ } |\mu|^{p-1} > \dfrac{|a|^2}{\mathrm{Re}\lambda} \text{ のとき}), \\ \dfrac{1}{(p-1)\mathrm{Re}\lambda|\mu|^{p-1}} \qquad (a = 0 \text{ のとき}). \end{cases}$$

3.2　非線型シュレディンガー方程式 ([2, Appendix])

$P(\xi) = i|\xi|^2$ ($\xi \in \mathbf{R}^n$), $\nu = (0, \dots, 0)$ とし, $l = 0$, $k_{(0,\dots,0)} = p - 1$ ($p > 1$) の場合, すなわち

$$\mathcal{N}(v, w) = |v|^{p-1}w, \quad (v, w) \in \mathbf{C}^1 \times \mathbf{C}$$

の場合を考える. このとき, (1) は非線型シュレディンガー方程式

$$\partial_t u - i\Delta u = \lambda |u|^{p-1} u, \quad (t, x) \in (0, \infty) \times \mathbf{R}^n$$

となる. このとき, $U(t, x) = e^{ia\cdot x - i|a|^2 t}$ である. また, $K = p - 1, \omega = 1$ であり, 定理 1 における (3) は

$$A(t) = \begin{cases} \mu\bigl(1 - (p-1)\mathrm{Re}\lambda|\mu|^{p-1}t\bigr)^{-\frac{\lambda}{(p-1)\mathrm{Re}\lambda}} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad (\mathrm{Re}\lambda \neq 0 \text{ のとき}), \\ \mu \exp(i\mathrm{Im}\lambda|\mu|^{p-1}t) \qquad (\mathrm{Re}\lambda = 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

となる[*5].

定理 2 の部分は次のようになる. $\mu \neq 0$ とする. $\mathrm{Re}\lambda \leq 0$ のとき, $A(t)$ は時間大域的に存在する. さらに, $\mathrm{Re}\lambda < 0$ ならば, $\lim_{t\to\infty} A(t) = 0$ が成り立つ. 一方, $\mathrm{Re}\lambda > 0$ ならば $A(t)$ は次で与えられる時刻 $T^* > 0$ において爆発する:

$$T^* = \frac{1}{(p-1)\mathrm{Re}\lambda|\mu|^{p-1}}.$$

3.3　微分型非線型シュレディンガー方程式

$n = 1$, $P(\xi) = i\xi^2$ ($\xi \in \mathbf{R}$), $\nu = 1$ とし, $l = 0$, $k_0 = p - 1$ ($p > 1$) の場合, すなわち

$$\mathcal{N}(v, w) = |v|^{p-1}w, \quad (v, w) \in \mathbf{C}^1 \times \mathbf{C}$$

の場合を考える. このとき, (1) は微分型非線型シュレディンガー方程式

$$\partial_t u - i\partial_x^2 u = \lambda |u|^{p-1} \partial_x u, \quad (t, x) \in (0, \infty) \times \mathbf{R} \tag{8}$$

となる[*6]. このとき, $U(t, x) = e^{iax - ia^2 t}$ である. また, $K = p - 1, \omega = a$ であり, 定理 1 における (3) は

$$A(t) = \begin{cases} \mu\bigl(1 + (p-1)a\mathrm{Im}\lambda|\mu|^{p-1}t\bigr)^{\frac{i\lambda}{(p-1)\mathrm{Im}\lambda}} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad (\mathrm{Im}\lambda \neq 0 \text{ のとき}), \\ \mu \exp(ia\mathrm{Re}\lambda|\mu|^{p-1}t) \qquad (\mathrm{Im}\lambda = 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

となる.

定理 2 の部分は次のようになる. $\mu \neq 0$ とする. $a\mathrm{Im}\lambda \geq 0$ のとき, $A(t)$ は時間大域的に存在する. さらに, $a\mathrm{Im}\lambda > 0$ ならば, $\lim_{t\to\infty} A(t) = 0$ が成り立つ. 一方, $a\mathrm{Im}\lambda < 0$ ならば $A(t)$ は次で与えられる時刻 $T^* > 0$ において爆発する:

$$T^* = -\frac{1}{(p-1)a\mathrm{Im}\lambda|\mu|^{p-1}}.$$

3.4　一般化された複素 KdV 方程式 ([2, Section 3])

$n = 1$, $P(\xi) = -i\xi^3$ ($\xi \in \mathbf{R}$), $\nu = 1$ とし, $l = 0$, $k_0 = p - 1$ ($p > 1$) の場合, すなわち

$$\mathcal{N}(v, w) = |v|^{p-1}w, \quad (v, w) \in \mathbf{C}^1 \times \mathbf{C}$$

の場合を考える. このとき, (1) は一般化された複素 KdV 方程式

$$\partial_t u + \partial_x^3 u = \lambda |u|^{p-1} \partial_x u, \quad (t, x) \in (0, \infty) \times \mathbf{R}$$

となる. このとき, $U(t, x) = e^{iax + ia^3 t}$ である. また, $K = p - 1, \omega = a$ である. これより, この場合における A についての常微分方程式 (5) は, 直前に例として述べた微分型非線型シュレディンガー方程式 (8) から得られる常微分方程式と同じものとなる. A についての記述は以下全て直前の例と同じであるが, 正確を期するために述べる. 定理 1 における (3) は

$$A(t) = \begin{cases} \mu\bigl(1 + (p-1)a\mathrm{Im}\lambda|\mu|^{p-1}t\bigr)^{\frac{i\lambda}{(p-1)\mathrm{Im}\lambda}} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad (\mathrm{Im}\lambda \neq 0 \text{ のとき}), \\ \mu \exp(ia\mathrm{Re}\lambda|\mu|^{p-1}t) \qquad (\mathrm{Im}\lambda = 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

となる.

定理 2 の部分は次のようになる. $\mu \neq 0$ とする. $a\mathrm{Im}\lambda \geq 0$ のとき, $A(t)$ は時間大域的に存在する. さらに, $a\mathrm{Im}\lambda > 0$ ならば, $\lim_{t\to\infty} A(t) = 0$ が成り立つ. 一方, $a\mathrm{Im}\lambda < 0$ ならば $A(t)$ は次で与えられる時刻 $T^* > 0$ において爆発する:

$$T^* = -\frac{1}{(p-1)a\mathrm{Im}\lambda|\mu|^{p-1}}.$$

*5 ここで, A が初期条件 (2) の波数ベクトル a に依存していないことにも注意されたい.

*6 特に, $p = 3, \lambda \in \mathbf{R}$ の場合にはチェン・リー・リウ方程式と呼ばれる [1].

参考文献

[1] H. H. Chen, Y. C. Lee, C. S. Liu, Integrability of nonlinear Hamiltonian systems by inverse scattering method, Physica Scripta **20** (1979), 490–492.

[2] K. Doi, Fully nonlinear gauge invariant evolution of the plane wave, Differential Integral Equations **21** (2008), 851–858.

[3] N. Kita, Mode generating property of solutions to the nonlinear Schrödinger equations in one space dimension, in *Nonlinear dispersive equations*. Ozawa, T. and Tsutsumi, Y. (Eds.), GAKUTO Internat. Ser. Math. Sci. Appl. 26, Gakkōtosho, Tokyo, 2006, 111–128.

[4] 北直泰, δ 関数を初期データに持つ非線形 Schrödinger 方程式について, 数学 **62** (2010), 329–345.

On the time evolution of plane waves for nonlinear evolution equations with gauge invariance

Kazuyuki DOI
Department of Liberal Arts and Sciences, Faculty of Engineering

Summary

This paper is a supplement of our earlier work [2]. We consider nonlinear evolution equations with gauge invariant nonlinearity and plane wave initial data. Although the plane wave does not decay at infinity, by an elementary and simple argument we find an extremely smooth solution which has an explicit expression. Additionally, we study the global behavior of the solution from its representation.

Key Words: nonlinear evolution equations, gauge invariance, plane waves, global solutions, blow-up solutions