初期値をデルタ関数とする非線型シュレディンガー方程式系についての注意

土井　一幸 (工学部教養教育センター)・清水　翔之*

初期値をデルタ関数とする非線型シュレディンガー方程式系を考察する. 本稿では, 文献 [5] に基づいてこの系の特殊解を求めた上で, それが有限時刻で爆発する場合の爆発時刻と初期値との関係性についてある注意を与える.

キーワード: 非線型シュレディンガー方程式系, デルタ関数, 爆発解, 保存則

1　序

次の非線型シュレディンガー方程式 (NLS) 系を考える:

$$(1)\quad \begin{cases} i\partial_t u + \dfrac{1}{2m_1}\Delta u = \lambda_1 |v|^{p-1}u, \\ i\partial_t v + \dfrac{1}{2m_2}\Delta v = \lambda_2 |u|^{p-1}v, \\ u(0,x) = \mu\delta_a(x), \quad v(0,x) = \nu\delta_b(x). \end{cases}$$

ここで, $(t,x) \in (0,\infty)\times\mathbf{R}^n$, 未知関数 $u = u(t,x)$, $v = v(t,x)$ は複素数値であるとし, $i = \sqrt{-1}$, $n \in \mathbf{N}$, $\partial_t = \partial/\partial t$, $\Delta = \sum_{j=1}^{n} \partial^2/\partial x_j^2$, $m_1, m_2 > 0$, $\lambda_1, \lambda_2, \mu, \nu \in \mathbf{C}$, $a, b \in \mathbf{R}^n$, $p > 1$ とする. また, $c \in \mathbf{R}^n$ に対して $\delta_c(x)$ を $x = c$ に台を持つデルタ関数とする.

1.1　工学的背景

方程式系 (1) や, 単独の NLS

$$(2)\quad i\partial_t u + \Delta u = \lambda |u|^{p-1}u \quad \text{for } (t,x) \in (0,\infty)\times\mathbf{R}^n$$

は, $n = 1, p = 3$ であるときに, 非線型光学において光ファイバー内の光パルスの伝播を規定する基本方程式として現れる*1 [1]. この文脈においては, t が光ファイバーに沿った位置を, $x\ (= x_1)$ が時刻を表す変数となるが, 本稿では t で時刻を, x で位置を表すこととする.

ファイバー内を 1 つの光パルスが伝播する状況をモデル化したものが ($n = 1, p = 3$ とした) 単独の NLS (2) であり, 2 つの光パルスが同時かつ同一方向に伝播する状況をモデル化したものが連立の NLS 系 (1) である*2. なお, このような 2 元連立方程式を得るに当たっては, 2 つの入射光波について, “周波数は異なるが同じ偏光面をもつ” または “周波数は等しいが異なる偏光面をもつ” という仮定がなされている*3.

ここで, 非線型項の複素係数 $\lambda, \lambda_1, \lambda_2$ の表す効果について述べる. これらの実部は光強度に比例して媒質の屈折率が変化する現象*4の度合いを, 虚部は光強度に比例して媒質の吸収係数が変化する現象*5の度合いを, それぞれ表している. 特に, 虚部が負の場合が媒質がパルスの強度を吸収する場合に相当する. 一方で, (モデルとしては不自然だが数学的には) 虚部が正の場合にはパルスの強度を増大させる効果を持つ. これらを数学的に理解しようとすると, 非線型項の係数が実数である場合には方程式がいくつかの保存則を持つために多くの研究

---

* 神戸大学大学院海事科学研究科

*1 しかし, 本稿では後述の (4) で定める関数 $\Phi(t)$ を考慮し, あるいは Kenig-Ponce-Vega [12] の結果を踏まえ, $n = 1$ の場合には $p < 3$ という制限を受けた議論になる.

*2 連立系のモデル化においては自己相互作用項も現れるが, 本稿ではその部分については考慮しない.

*3 さらに一般的な状況となる “周波数も偏光面も異なる 2 つの光パルスの伝播” を議論するには 4 元連立方程式を考察することになる.

*4 光カー効果 (optical Kerr effect) と呼ばれる.

*5 2 光子吸収 (two-photon absorption) と呼ばれる.

成果が得られているが, 真に複素数 (すなわち虚部が非零) の場合にはそのような保存則を利用できなくなるために解析が難しくなる (解の挙動が複雑になる). そこで本稿では, これらの非線型効果を幾許かでも理解するために, 初期値をデルタ関数に限定することにより連立系 (1) の解の挙動を見ていくことにする (第 1.3 節, 第 2 節を参照).

1.2　数学的背景

まず, 単独の NLS については, 関数の可微分性 (滑らかさ) が高く, 遠方で十分に減衰するようなクラスにおいて多くの成果がある. 例えば, $H^1(\mathbf{R}^n)$ においては [6, 10], $L^2(\mathbf{R}^n)$ においては [21], $H^2(\mathbf{R}^n)$ においては [22], その他の指数 $s > 0$ を持つソボレフ空間 $H^s(\mathbf{R}^n)$ においては [4, 7, 11, 18, 20, 23, 24] 等を参照されたい[*6]. 一方で, そうでない場合, すなわち負の指数を持つソボレフ空間においては, [3, 13, 14] 等の結果はあるものの, あまり多くの研究成果は得られていない. なお, [3, 13, 14] では 2 次の非線型項を扱っており, 非線型項の (時空についての) フーリエ変換が畳み込み積分で表されることを用いることによってフーリエ制限ノルム法がうまく機能している. ここで, このアイディアを非線型項の冪を一般の場合にまで拡げようとしても, その評価が現時点では無いために現時点ではフーリエ制限ノルム法は使えないことに注意する. これが特異性の強い初期値に対する NLS を扱った成果が多くない主な理由である. ただし, [9] では球対称な初期値に制限することで, デルタ関数は含まれないものの, ある程度特異性のある空間で解を構成することに成功している. 我々は (デルタ関数のような) 特異性を持つ初期データが与えられたときに非整数冪の非線型項を持つ NLS (あるいはその系) の解を構成することを念頭に置いている[*7]. このような問題は, 初期値をデルタ関数とした場合に単独の NLS についての結果がいくつかある. Banica-Vega [2] は 初期値を $\delta_0 + (L^2$-関数$)$ として非線型項の冪が $\min\{1 + 2/n, 2\}$ より小さい場合に, 時間大域解を構成した (ただし非線型項の係数は実数とし, $n = 1$ の場合は $p = 2$ も含まれる). また, Wada [25] は初期値に $\delta_0 + (L^2$-関数$)$ と p.v. $(1/x)$ の和を与えて局所解を構成している. ただし p.v. はコーシーの主値とした. Kenig-Ponce-Vega [12] は, 空間 1 次元の場合に非線型項の冪が 3 以上であるならば, 初期値を δ_0 とすると NLS は非適切となることを示した (空間次元が n のときには非線型項の冪が $1 + 2/n$ 以上であれば同じ結果が成り立つ).

次に, NLS 系においては Hayashi-Li-Naumkin [8] が空間 2 次元での散乱問題を条件 $2m_1 = m_2$ の下で考察している. これに対し, Ozawa-Sunagawa [19] は, Hopf-Cole 変換を用いることにより 3 波連立系において小さな初期値に対する爆発解を構成した. 上記の解はどちらも $H^s(\mathbf{R}^n)$ $(s \geq 1)$ に属していることに注意する. 一方, [5] では初期値をデルタ関数として, 次の形

$$
\begin{aligned}
u(t,x) &= A(t)e^{it\frac{\Delta}{2m_1}}\delta_a(x) \\
&= A(t)\Big(\frac{m_1}{2\pi it}\Big)^{n/2}\exp\Big(\frac{im_1|x-a|^2}{2t}\Big), \\
v(t,x) &= B(t)e^{it\frac{\Delta}{2m_2}}\delta_b(x) \\
&= B(t)\Big(\frac{m_2}{2\pi it}\Big)^{n/2}\exp\Big(\frac{im_2|x-b|^2}{2t}\Big)
\end{aligned}
\tag{3}
$$

で表される連立系 (1) の解が求められた. ここで, $e^{it\frac{\Delta}{2m_i}}$ $(i = 1, 2)$ は自由シュレディンガー方程式の解作用素である. このことは, デルタ関数を初期値とする単独の NLS において上記のような表示式を持つ解を求めた Kita [15] の結果に触発されている. 荒く言えば, [5] で得られた主張は次のようなものである:

(1) 後述の保存則 (命題 4) により, 連立系 (1) の厳密解と減衰オーダーや爆発オーダーが初等的手法のみによって陽的に求まる (後述の定理 1, 系 2).
(2) さらに, 連立系 (1) の解は単独の NLS には見られない漸近挙動を持つ. 例えば, 時間大域解で指数増大するものや指数減衰するものが現れる (後述の注意 1 や注意 3 を参照されたい).

ここで, Hayashi-Li-Naumkin [8] 及び Ozawa-Sunagawa [19] においては非線型項を 2 次, 質量比を整数という仮定をしているが, [5] ではそれらは仮定されていないことに注意する. また, 最近 Kita-Shimizu [17] が力学系的アプローチによって, (1) の非線型項の冪に等しさを仮定しない場合にも解の挙動を得たことにも注目したい.

---

*6 $s \in \mathbf{R}$ に対して, ソボレフ空間 $H^s(\mathbf{R}^n)$ を $H^s(\mathbf{R}^n) = \{u \in L^2(\mathbf{R}^n) \mid \int_{\mathbf{R}^n}(1+|\xi|^2)^s|(\mathcal{F}u)(\xi)|^2\,d\xi < \infty\}$ と定義する. ここで, $\mathcal{F}u$ は u のフーリエ変換とした.

*7 デルタ関数 δ_c $(c \in \mathbf{R}^n)$ は, $\delta_c \notin H^{-n/2}(\mathbf{R}^n)$ であり, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\delta_c \in H^{-n/2-\varepsilon}(\mathbf{R}^n)$ である. あるいは, 任意の $s < -n/2$ に対して $\delta_c \in H^s(\mathbf{R}^n)$ といってもよい.

1.3　文献 [5] の結果の紹介

さて, 本稿を通じて, (1) に対して以下の記号を用いる:

$$
\begin{aligned}
K &= \kappa_1 - \kappa_2, \\
\kappa_1 &= \mathrm{Im}\lambda_2 |m_1^{n/2}\mu|^{p-1}, \\
\kappa_2 &= \mathrm{Im}\lambda_1 |m_2^{n/2}\nu|^{p-1}, \\
\Phi(t) &= \int_0^t (2\pi s)^{-n(p-1)/2}\, ds.
\end{aligned} \tag{4}
$$

ここで, $(0, t)$ 上の広義積分 $\int_0^t (2\pi s)^{-n(p-1)/2}\, ds$ が収束するのは $1 < p < 1 + 2/n$ の場合であることに注意する. このとき, $\Phi(0) = 0$, $\lim_{t\to\infty} \Phi(t) = \infty$ である.

以上の記号を用いて, [5] において次が得られた:

定理 1 ([5]). $1 < p < 1 + 2/n$ とする. このとき, 方程式系 (1) は次の形で表される解を持つ:

1. $K = 0$ の場合:
   (a) $\mathrm{Im}\lambda_1 = \mathrm{Im}\lambda_2 = 0$ のとき:

$$
\begin{aligned}
u(t,x) &= \mu \exp\big(-i\lambda_1 |m_2^{n/2}\nu|^{p-1}\Phi(t)\big) \\
&\qquad \times e^{it\frac{\Delta}{2m_1}} \delta_a(x), \\
v(t,x) &= \nu \exp\big(-i\lambda_2 |m_1^{n/2}\mu|^{p-1}\Phi(t)\big) \\
&\qquad \times e^{it\frac{\Delta}{2m_2}} \delta_b(x);
\end{aligned} \tag{5}
$$

   (b) $\mathrm{Im}\lambda_1 \neq 0, \mathrm{Im}\lambda_2 \neq 0$ のとき:

$$
\begin{aligned}
u(t,x) &= \mu\big(1 - (p-1)\kappa_1\Phi(t)\big)^{\frac{i\lambda 1}{(p-1)\mathrm{Im}\lambda_1}} \\
&\qquad \times e^{it\frac{\Delta}{2m_1}} \delta_a(x), \\
v(t,x) &= \nu\big(1 - (p-1)\kappa_2\Phi(t)\big)^{\frac{i\lambda 2}{(p-1)\mathrm{Im}\lambda_2}} \\
&\qquad \times e^{it\frac{\Delta}{2m_2}} \delta_b(x);
\end{aligned} \tag{6}
$$

2. $K \neq 0$ の場合:

$$
\begin{aligned}
&u(t,x) \\
&= \begin{cases} \mu e^{\Psi_1(t)} e^{it\frac{\Delta}{2m_1}} \delta_a(x) \ (\mathrm{Im}\lambda_1 = 0 \text{ のとき}), \\ \mu\big(1 - \frac{\kappa_2}{K}(e^{(p-1)K\Phi(t)} - 1)\big)^{\frac{i\lambda 1}{(p-1)\mathrm{Im}\lambda_1}} \\ \qquad \times e^{it\frac{\Delta}{2m_1}} \delta_a(x) \\ \qquad (\mathrm{Im}\lambda_1 \neq 0 \text{ のとき}), \end{cases} \\
&v(t,x) \\
&= \begin{cases} \nu e^{\Psi_2(t)} e^{it\frac{\Delta}{2m_2}} \delta_b(x) \ (\mathrm{Im}\lambda_2 = 0 \text{ のとき}), \\ \nu\big(1 - \frac{\kappa_1}{K}(1 - e^{-(p-1)K\Phi(t)})\big)^{\frac{i\lambda 2}{(p-1)\mathrm{Im}\lambda_2}} \\ \qquad \times e^{it\frac{\Delta}{2m_2}} \delta_b(x) \\ \qquad (\mathrm{Im}\lambda_2 \neq 0 \text{ のとき}), \end{cases}
\end{aligned} \tag{7}
$$

ただし, (7) において

$$
\begin{aligned}
\Psi_1(t) &= -\frac{i\lambda_1 |m_2^{n/2}\nu|^{p-1}}{(p-1)K} (e^{(p-1)K\Phi(t)} - 1), \\
\Psi_2(t) &= -\frac{i\lambda_2 |m_1^{n/2}\mu|^{p-1}}{(p-1)K} (1 - e^{-(p-1)K\Phi(t)})
\end{aligned}
$$

とした.

注意 1. K の定義 (4) から, $\mathrm{Im}\lambda_1 = 0$ のときは $K = \kappa_1$ であり, $\mathrm{Im}\lambda_2 = 0$ のときは $K = -\kappa_2$ である. よって, $K \neq 0$ かつ $\mathrm{Im}\lambda_1 = 0$ ならば, (7) より

$$
v(t,x) = \nu \exp\big(-i\lambda_2 |m_1^{n/2}\mu|^{p-1}\Phi(t)\big) e^{it\frac{\Delta}{2m_2}} \delta_b(x)
$$

となる. 同様に, $K \neq 0$ かつ $\mathrm{Im}\lambda_2 = 0$ ならば

$$
u(t,x) = \mu \exp\big(-i\lambda_1 |m_2^{n/2}\nu|^{p-1}\Phi(t)\big) e^{it\frac{\Delta}{2m_1}} \delta_a(x).
$$

となる.

注意 2. 初期値をデルタ関数とした場合の単独の NLS (2) については, [15] において考察された (この場合には, より一般的な初期値であるデルタ関数の重ね合わせが扱われている. なお, 和文での解説 [16] も参照されたい). その場合と同様に, (1) の解で定理 1 (すなわち (3)) 以外の表示を持つものが存在するのか否かについては未解決である.

定理 1 で得られた方程式系 (1) の解の表示を用いて, その時間大域的振る舞いも得られる [5, Corollary]. 以下ではこのことを述べる.

$n \in \mathbf{N}$, $1 < p < 1 + 2/n$ に対して, 正定数 $C_{n,p}$ を

$$
C_{n,p} = \frac{p-1}{(2\pi)^{n(p-1)/2}\, q} \tag{8}
$$

と定める, ただし,

$$
q = 1 - \frac{n(p-1)}{2} \ (> 0) \tag{9}
$$

とした. ここで, $\Phi(t) = C_{n,p}(p-1)^{-1} t^q$ と表されることに注意されたい.

系 2 ([5]). $1 < p < 1 + 2/n$ かつ $\mu \neq 0$, $\nu \neq 0$ とする. K, κ_1, κ_2, $\Phi(t)$ を (4) で定められたものとし, $C_{n,p}$, q をそれぞれ (8), (9) で定められたものとする. また, $\widetilde{K} = C_{n,p}(p-1)^{-1}K$,

$$
\begin{aligned}
F_1(t) &= 1 - \frac{\kappa_2}{K}\big(e^{(p-1)K\Phi(t)} - 1\big), \\
F_2(t) &= 1 + \frac{\kappa_1}{K}\big(e^{-(p-1)K\Phi(t)} - 1\big)
\end{aligned}
$$

とする. さらに, u, v を定理 1 において与えられた (1) の解とする. このとき, u, v の時間大域的振る舞いは以下のようになる:

1. $K=0$ の場合:
   (a) $\mathrm{Im}\lambda_1 = \mathrm{Im}\lambda_2 = 0$ のとき:
   $u(t), v(t)$ は時間大域的に存在し, 各 $t>0$ に対して

$$|u(t,x)| = |\mu|\big(\frac{m_1}{2\pi t}\big)^{n/2}, \quad |v(t,x)| = |\nu|\big(\frac{m_2}{2\pi t}\big)^{n/2} \qquad (x\in\mathbf{R}^n)$$

   が成り立つ.
   (b) $\mathrm{Im}\lambda_1 < 0$ かつ $\mathrm{Im}\lambda_2 < 0$ のとき:
   $u(t), v(t)$ は時間大域的に存在し,

$$\begin{aligned}|u(t,x)| &= |\mu|\big(\frac{m_1}{2\pi t}\big)^{n/2}\big(1-C_{n,p}\kappa_1 t^q\big)^{-\frac{1}{p-1}} \\ &\sim \Big(\frac{q}{-\kappa_1(p-1)}\Big)^{\frac{1}{p-1}}|m_1^{n/2}\mu|t^{-\frac{1}{p-1}} \quad (t\to+\infty),\\ |v(t,x)| &= |\nu|\big(\frac{m_2}{2\pi t}\big)^{n/2}\big(1-C_{n,p}\kappa_2 t^q\big)^{-\frac{1}{p-1}} \\ &\sim \Big(\frac{q}{-\kappa_2(p-1)}\Big)^{\frac{1}{p-1}}|m_2^{n/2}\nu|t^{-\frac{1}{p-1}} \quad (t\to+\infty)\end{aligned}$$

   が成り立つ.
   (c) $\mathrm{Im}\lambda_1 > 0$ かつ $\mathrm{Im}\lambda_2 > 0$ の場合:
   $u(t), v(t)$ は次で与えられる時刻 $t=T^*$ で爆発する:

$$T^* = \big(\frac{1}{C_{n,p}\kappa_1}\big)^{1/q} = \big(\frac{1}{C_{n,p}\kappa_2}\big)^{1/q}.$$

2. $K>0$ の場合:
   (a) $\mathrm{Im}\lambda_1 = 0$ かつ $\mathrm{Im}\lambda_2 > 0$ のとき:
   $u(t), v(t)$ は時間大域的に存在し,

$$\begin{aligned}|u(t,x)| &= |\mu|\big(\frac{m_1}{2\pi t}\big)^{n/2},\\ |v(t,x)| &= |\nu|\big(\frac{m_2}{2\pi t}\big)^{n/2}e^{K\Phi(t)} \\ &= O\big(t^{-n/2}e^{\widetilde{K}t^q}\big) \quad (t\to+\infty)\end{aligned}$$

   が成り立つ.
   (b) $\mathrm{Im}\lambda_1 < 0$ のとき:
   $u(t), v(t)$ は時間大域的に存在し,

$$\begin{aligned}|u(t,x)| &= |\mu|\big(\frac{m_1}{2\pi t}\big)^{n/2}F_1(t)^{-\frac{1}{p-1}} \\ &\sim \big(\frac{K}{-\kappa_2}\big)^{\frac{1}{p-1}}|m_1^{n/2}\mu|(2\pi t)^{-n/2}e^{-K\Phi(t)} \\ &= O\big(t^{-n/2}e^{-\widetilde{K}t^q}\big) \quad (t\to+\infty),\\ |v(t,x)| &= |\nu|\big(\frac{m_2}{2\pi t}\big)^{n/2}F_2(t)^{-\frac{1}{p-1}} \\ &\sim \big(\frac{K}{-\kappa_2}\big)^{\frac{1}{p-1}}|m_2^{n/2}\nu|(2\pi t)^{-n/2} \quad (t\to+\infty)\end{aligned}$$

   が成り立つ.
   (c) $\mathrm{Im}\lambda_1 > 0, \mathrm{Im}\lambda_2 > 0$ のとき:
   $u(t), v(t)$ は次で与えられる時刻 $t=T^*$ で爆発する:

$$T^* = \big(\frac{\log\kappa_1 - \log\kappa_2}{C_{n,p}K}\big)^{1/q}.$$

3. $K<0$ の場合[*8]:
   (a) $\mathrm{Im}\lambda_1 > 0$ かつ $\mathrm{Im}\lambda_2 = 0$ のとき:
   $u(t), v(t)$ は時間大域的に存在し,

$$\begin{aligned}|u(t,x)| &= |\mu|\big(\frac{m_1}{2\pi t}\big)^{n/2}e^{-K\Phi(t)} \\ &= O\big(t^{-n/2}e^{-\widetilde{K}t^q}\big) \quad (t\to+\infty),\\ |v(t,x)| &= |\nu|\big(\frac{m_2}{2\pi t}\big)^{n/2}\end{aligned}$$

   が成り立つ.
   (b) $\mathrm{Im}\lambda_2 < 0$ のとき:
   $u(t), v(t)$ は時間大域的に存在し,

$$\begin{aligned}|u(t,x)| &= |\mu|\big(\frac{m_1}{2\pi t}\big)^{n/2}F_1(t)^{-\frac{1}{p-1}} \\ &\sim \big(\frac{K}{\kappa_1}\big)^{\frac{1}{p-1}}|m_1^{n/2}\mu|(2\pi t)^{-n/2} \quad (t\to+\infty),\\ |v(t,x)| &= |\nu|\big(\frac{m_2}{2\pi t}\big)^{n/2}F_2(t)^{-\frac{1}{p-1}} \\ &\sim \big(\frac{K}{\kappa_1}\big)^{\frac{1}{p-1}}|m_2^{n/2}\nu|(2\pi t)^{-n/2}e^{K\Phi(t)} \\ &= O\big(t^{-n/2}e^{\widetilde{K}t^q}\big) \quad (t\to+\infty)\end{aligned}$$

   が成り立つ.

[*8] Doi-Shimizu [5] において, この部分 (すなわち $K<0$ の場合) は “$K>0$ の場合と類似の結果が成り立つ.” という表現によって省略されているが, 折角の機会であるから本稿では結果を明示しておく.

(c) $\mathrm{Im}\lambda_1 > 0, \mathrm{Im}\lambda_2 > 0$ のとき:
$u(t), v(t)$ は次で与えられる時刻 $t = T^*$ で爆発する:

$$T^* = \Big(\frac{\log\kappa_2 - \log\kappa_1}{C_{n,p}(-K)}\Big)^{1/q}.$$

注意 3. 系 2 の (1a)–(1c) については, 単独の方程式の解と同じ挙動である. このことは, 第 3 節の命題 4 からもわかる. 解の挙動について連立系 (1) の特徴が現れるのは $K \neq 0$ の場合である. 具体的には, (2a), (3a) ではそれぞれ v, u が指数増大し, (2b), (3b) ではそれぞれ u, v が指数減衰する. このような挙動は, 単独の方程式には現れない. これらのことを, $\mathrm{Im}\lambda_1, \mathrm{Im}\lambda_2$ の符号に応じて分類した以下の表 1 にまとめておく. なお, $\mathrm{Im}\lambda_1$ と $\mathrm{Im}\lambda_2$ の符号が同じ場合には, K の値に応じて該当するものが変わるため, 同じ枠内に複数の場合を記した.

表 1: $\|u(t)\|_{L^\infty(\mathbf{R^n})}, \|v(t)\|_{L^\infty(\mathbf{R}^n)}$ の挙動

	$\mathrm{Im}\lambda_2 < 0$	$\mathrm{Im}\lambda_2 = 0$	$\mathrm{Im}\lambda_2 > 0$
$\mathrm{Im}\lambda_1 < 0$	(1b): $u = v = O(t^{-\frac{1}{p-1}})$; (2b): u は指数減衰, $v = O(t^{-n/2})$; (3b): $u = O(t^{-n/2})$, v は指数減衰	(2b): u は指数減衰, $v = O(t^{-n/2})$	(2b): u は指数減衰, $v = O(t^{-n/2})$
$\mathrm{Im}\lambda_1 = 0$	(3b): $u = O(t^{-n/2})$, v は指数減衰	(1a): $u = v = O(t^{-n/2})$	(2a): $u = O(t^{-n/2})$, v は指数増大
$\mathrm{Im}\lambda_1 > 0$	(3b): $u = O(t^{-n/2})$, v は指数減衰	(3a): u は指数増大, $v = O(t^{-n/2})$	(1c), (2c), (3c): 有限時刻爆発

(スペースの都合上, この表では u で $\|u(t)\|_{L^\infty(\mathbf{R^n})}$ を, v で $\|v(t)\|_{L^\infty(\mathbf{R}^n)}$ をそれぞれ表した.)

定理 1, 系 2 の証明 ([5] に従う) は第 3 節にて行い, 次節では上記の注意に加えて, 爆発する場合, すなわち (2c) や (3c) の場合の爆発時刻 T^* について, [5] では言及されなかったことを述べる.

2 解の爆発時刻に関する注意

系 2 において, 連立系 (1) の解が爆発するのは, K の値にかかわらず $\mathrm{Im}\lambda_1 > 0$ かつ $\mathrm{Im}\lambda_2 > 0$ の場合のみであった. そのときの爆発時刻 T^* は

$$(T^*)^q = \begin{cases} C_{n,p}/\kappa_1 = C_{n,p}/\kappa_2 & (K = 0 \text{ のとき}),\\ C_{n,p}\dfrac{\log\kappa_1 - \log\kappa_2}{\kappa_1 - \kappa_2} & (K \neq 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

なる関係で与えられた ($K = \kappa_1 - \kappa_2$ であることに注意せよ).

これより, $K = 0$, すなわち $\kappa_1 = \kappa_2$ の場合には $T^* = C_1|\mu|^{-(p-1)/q} = C_2|\nu|^{-(p-1)/q}$ となり, $|\mu|$ や $|\nu|$ が大きい (小さい) ほど爆発が早く (遅く) 生じる. ここで,

$$C_1 = \Big(\frac{C_{n,p}}{m_1^{n(p-1)/2}\mathrm{Im}\lambda_2}\Big)^{1/q},$$
$$C_2 = \Big(\frac{C_{n,p}}{m_2^{n(p-1)/2}\mathrm{Im}\lambda_1}\Big)^{1/q}$$

とおいた.

次に $K \neq 0$ の場合を考える. T^* の式中に現れる $(\log\kappa_1 - \log\kappa_2)/(\kappa_1 - \kappa_2)$ は $x = \kappa_1$ から $x = \kappa_2$ までの $\log x$ の平均変化率である. これより, 任意の $T > 0$ に対して,

$$\text{(10)} \qquad \frac{\log\kappa_1 - \log\kappa_2}{\kappa_1 - \kappa_2} \geq \frac{T^q}{C_{n,p}}$$

を満たすような κ_1, κ_2 を選べば, (3) で表される (1) の解 $u(t), v(t)$ の爆発時刻 T^* は $T^* \geq T$ となる. ここで, 条件 (10) は

$$\text{(11)} \quad \kappa_m \exp\Big(-\frac{T^q}{C_{n,p}}\kappa_m\Big) \leq \kappa_M \exp\Big(-\frac{T^q}{C_{n,p}}\kappa_M\Big)$$

と表すこともできることに注意する[*9], ただし,

$$\kappa_m = \min\{\kappa_1, \kappa_2\}, \quad \kappa_M = \max\{\kappa_1, \kappa_2\}$$

とした[*10]. これは, 任意に時刻を与えたときに, (1) の初期値の係数 μ, ν のうち, どちらかを任意の複素数としても他方をその絶対値が十分小さくなるように選べば, あらかじめ与えたその時刻まで解が存在するということを意味している. この性質は, 上述の $K = 0$ の場合の爆発とは異なるものである. 以上をまとめると次のようになる:

[*9] 関数 $f(x) = xe^{-\tau x}$ $(x > 0, \tau = T^q/C_{n,p})$ を考えたとき, 条件 (11) は $f(\kappa_m) \leq f(\kappa_M)$ が成り立つということである. $f(x)$ のグラフを考えてみれば条件 (11) が理解し易いであろう.

[*10] $K \neq 0$ の場合を考えているため, $\kappa_m \neq \kappa_M$ であることに注意する.

命題 3. $\mathrm{Im}\lambda_1 > 0$, $\mathrm{Im}\lambda_2 > 0$, (4) で定義された K は $K \neq 0$ とする. このとき, 任意の $T > 0$, $\mu, \nu \in \mathbf{C}$ に対して, (10) (すなわち (11)) が成り立つならば, 定理 1 の (7) で与えられる連立系 (1) の解 $u(t)$, $v(t)$ は少なくとも $0 \le t \le T$ においては存在する.

一方で, $\dfrac{d}{dx}\log x = \dfrac{1}{x}$ に注意すれば, T^* の表示式から $K = 0$ (それは単独の方程式も含む) は $K \neq 0$ の極限的なものと捉えることもできる. 今後は, 本節や注意 3 のような単独の方程式と連立系との関連性をより一般の問題に対して考察していくことが課題の一つとなる.

3　定理 1, 系 2 の証明

この節では, [5] に従って定理 1 を示す. なお, その過程で得られた結果を用いて系 2 も直ちに示される.

証明を始めるにあたって, まず (3) を (1) に代入すると, 次の常微分方程式系を得る:

$$(12)\qquad \begin{cases} \dfrac{dA}{dt} = -i\lambda_1\varphi(t)|m_2^{n/2}B|^{p-1}A, & A(0) = \mu, \\ \dfrac{dB}{dt} = -i\lambda_2\varphi(t)|m_1^{n/2}A|^{p-1}B, & B(0) = \nu, \end{cases}$$

ただし, $\varphi(t) = (2\pi t)^{-n(p-1)/2}$ とした.

次に, 以下の等式に注意する:

$$(13)\qquad \frac{1}{|f(t)|^{2-\alpha}}\frac{d}{dt}|f(t)|^2 = \frac{2}{\alpha}\frac{d}{dt}|f(t)|^{\alpha},$$

ただし $\alpha \in \mathbf{R}$ とする. 実際,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}|f(t)|^{\alpha} &= \frac{d}{dt}(|f(t)|^2)^{\frac{\alpha}{2}} \\ &= \frac{\alpha}{2}(|f(t)|^2)^{\frac{\alpha}{2}-1}\frac{d}{dt}|f(t)|^2 \\ &= \frac{\alpha}{2}|f(t)|^{\alpha-2}\frac{d}{dt}|f(t)|^2 \end{aligned}$$

となることからよい.

さて, 本稿で本質的な役割を担う (12) の解に対する保存則を述べる.

命題 4. (A, B) を (12) の解とする. このとき, 任意の $t \ge 0$ に対して次が成り立つ:

$$\mathrm{Im}\lambda_2|m_1^{n/2}A(t)|^{p-1} - \mathrm{Im}\lambda_1|m_2^{n/2}B(t)|^{p-1} = K,$$

ただし, K は (4) で定められたものである.

証明. (12) の第 1 式, 第 2 式の両辺にそれぞれ $2A^*(t)$, $2B^*(t)$ を掛ける:

$$\begin{aligned} 2A^*(t)\frac{dA}{dt} &= -2i\lambda_1\varphi(t)|m_2^{n/2}B(t)|^{p-1}|A(t)|^2, \\ 2B^*(t)\frac{dB}{dt} &= -2i\lambda_2\varphi(t)|m_1^{n/2}A(t)|^{p-1}|B(t)|^2. \end{aligned}$$

そして, それらの実部を取る:

$$(14)\qquad \begin{aligned} \frac{d}{dt}|A(t)|^2 &= 2\mathrm{Im}\lambda_1\varphi(t)|m_2^{n/2}B(t)|^{p-1}|A(t)|^2, \\ \frac{d}{dt}|B(t)|^2 &= 2\mathrm{Im}\lambda_2\varphi(t)|m_1^{n/2}A(t)|^{p-1}|B(t)|^2. \end{aligned}$$

ここで, $\alpha = p-1$ として (13) を用いると, (14) から

$$(15)\qquad \begin{aligned} \frac{d}{dt}|A(t)|^{p-1} &= \frac{p-1}{2}\frac{1}{|A(t)|^{2-(p-1)}}\frac{d}{dt}|A(t)|^2 \\ &= (p-1)\mathrm{Im}\lambda_1\varphi(t)|A(t)|^{p-1}|m_2^{n/2}B(t)|^{p-1}, \\ \frac{d}{dt}|B(t)|^{p-1} &= \frac{p-1}{2}\frac{1}{|B(t)|^{2-(p-1)}}\frac{d}{dt}|B(t)|^2 \\ &= (p-1)\mathrm{Im}\lambda_2\varphi(t)|m_1^{n/2}A(t)|^{p-1}|B(t)|^{p-1} \end{aligned}$$

を得る. (15) の第 1 式の両辺に $\mathrm{Im}\lambda_2(m_1)^{n(p-1)/2}$ を, 第 2 式の両辺に $\mathrm{Im}\lambda_1(m_2)^{n(p-1)/2}$ をそれぞれ掛けて両辺を引き合うと,

$$\frac{d}{dt}\left(\mathrm{Im}\lambda_2|m_1^{n/2}A(t)|^{p-1} - \mathrm{Im}\lambda_1|m_2^{n/2}B(t)|^{p-1}\right) = 0$$

となる. これより命題の主張が示された. □

それでは, 定理 1 を示す.

定理 1 の証明. まず, $K = 0$ の場合を考える. この場合は命題 4 から

$$\mathrm{Im}\lambda_1|m_2^{n/2}B(t)|^{p-1} = \mathrm{Im}\lambda_2|m_1^{n/2}A(t)|^{p-1}$$

であることに注意する. よって. (14) より

$$(16)\qquad \begin{aligned} \frac{d}{dt}|A(t)|^2 &= 2\mathrm{Im}\lambda_2 m_1^{n(p-1)/2}\varphi(t)|A(t)|^{p+1}, \\ \frac{d}{dt}|B(t)|^2 &= 2\mathrm{Im}\lambda_1 m_2^{n(p-1)/2}\varphi(t)|B(t)|^{p+1}, \end{aligned}$$

である. ここで, $\alpha = -(p-1)$ として (13) を適用すれば, (16) より

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}|A(t)|^{-(p-1)} &= -\frac{p-1}{2}|A(t)|^{-(p-1)-2}\frac{d}{dt}|A(t)|^2 \\ &= -(p-1)\mathrm{Im}\lambda_2 m_1^{n(p-1)/2}\varphi(t), \\ \frac{d}{dt}|B(t)|^{-(p-1)} &= -\frac{p-1}{2}|B(t)|^{-(p-1)-2}\frac{d}{dt}|B(t)|^2 \\ &= -(p-1)\mathrm{Im}\lambda_1 m_2^{n(p-1)/2}\varphi(t) \end{aligned}$$

を得る. これらの両辺を 0 から t まで積分すれば

$$\begin{aligned} &|A(t)|^{-(p-1)} - |\mu|^{-(p-1)} \\ &\qquad = -(p-1)\mathrm{Im}\lambda_2 m_1^{n(p-1)/2}\varPhi(t), \\ &|B(t)|^{-(p-1)} - |\nu|^{-(p-1)} \\ &\qquad = -(p-1)\mathrm{Im}\lambda_1 m_2^{n(p-1)/2}\varPhi(t) \end{aligned}$$

となる. よって,

$$
(17)\quad \begin{aligned}
|A(t)|^{p-1} &= \frac{|\mu|^{p-1}}{1-(p-1)\kappa_1\Phi(t)},\\
|B(t)|^{p-1} &= \frac{|\nu|^{p-1}}{1-(p-1)\kappa_2\Phi(t)}
\end{aligned}
$$

である. (17) を (12) に代入すれば, (5), (6) が得られる.

次に $K \neq 0$ の場合を考える. 命題 4 から

$$
(18)\quad \begin{aligned}
&\mathrm{Im}\lambda_1|m_2^{n/2}B(t)|^{p-1}\\
&\qquad = \mathrm{Im}\lambda_2|m_1^{n/2}A(t)|^{p-1} - K,\\
&\mathrm{Im}\lambda_2|m_1^{n/2}A(t)|^{p-1}\\
&\qquad = \mathrm{Im}\lambda_1|m_2^{n/2}B(t)|^{p-1} + K
\end{aligned}
$$

である. (18) を (14) に代入して,

$$
(19)\quad \begin{aligned}
\frac{d}{dt}|A(t)|^2 &= -2K\varphi(t)|A(t)|^2\\
&\quad + 2\mathrm{Im}\lambda_2 m_1^{n(p-1)/2}\varphi(t)|A(t)|^{p+1},\\
\frac{d}{dt}|B(t)|^2 &= 2K\varphi(t)|B(t)|^2\\
&\quad + 2\mathrm{Im}\lambda_1 m_2^{n(p-1)/2}\varphi(t)|B(t)|^{p+1}
\end{aligned}
$$

となる. よって, (19) の第 1 式に $e^{2K\Phi(t)}$ を, 第 2 式に $e^{-2K\Phi(t)}$ をそれぞれ掛けることにより

$$
(20)\quad \begin{aligned}
&|e^{K\Phi(t)}A(t)|^{-(p+1)}\frac{d}{dt}|e^{K\Phi(t)}A(t)|^2\\
&\qquad = 2\mathrm{Im}\lambda_2 m_1^{n(p-1)/2}\frac{d}{dt}\frac{e^{-(p-1)K\Phi(t)}}{-(p-1)K},\\
&|e^{-K\Phi(t)}B(t)|^{-(p+1)}\frac{d}{dt}|e^{-K\Phi(t)}B(t)|^2\\
&\qquad = 2\mathrm{Im}\lambda_1 m_2^{n(p-1)/2}\frac{d}{dt}\frac{e^{(p-1)K\Phi(t)}}{(p-1)K}
\end{aligned}
$$

を得る. ここで, $\alpha = -(p-1)$ として (13) を適用すれば, (20) より

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}|e^{K\Phi(t)}A(t)|^{-(p-1)}\\
&\qquad = -(p-1)\mathrm{Im}\lambda_2 m_1^{n(p-1)/2}\frac{d}{dt}\frac{e^{-(p-1)K\Phi(t)}}{-(p-1)K},\\
&\frac{d}{dt}|e^{-K\Phi(t)}B(t)|^{-(p-1)}\\
&\qquad = -(p-1)\mathrm{Im}\lambda_1 m_2^{n(p-1)/2}\frac{d}{dt}\frac{e^{(p-1)K\Phi(t)}}{(p-1)K}
\end{aligned}
$$

を得る. これらの両辺を 0 から t まで積分すれば

$$
\begin{aligned}
&|e^{K\Phi(t)}A(t)|^{-(p-1)} - |\mu|^{-(p-1)}\\
&\qquad = \frac{\mathrm{Im}\lambda_2 m_1^{n(p-1)/2}}{K}\big(e^{-(p-1)K\Phi(t)} - 1\big),\\
&|e^{-K\Phi(t)}B(t)|^{-(p-1)} - |\nu|^{-(p-1)}\\
&\qquad = -\frac{\mathrm{Im}\lambda_1 m_2^{n(p-1)/2}}{K}\big(e^{(p-1)K\Phi(t)} - 1\big)
\end{aligned}
$$

となる. よって,

$$
(21)\quad \begin{aligned}
|A(t)|^{p-1} &= \frac{|\mu|^{p-1}e^{-(p-1)K\Phi(t)}}{1+\frac{\kappa_1}{K}\big(e^{-(p-1)K\Phi(t)}-1\big)},\\
|B(t)|^{p-1} &= \frac{|\nu|^{p-1}e^{(p-1)K\Phi(t)}}{1-\frac{\kappa_2}{K}\big(e^{(p-1)K\Phi(t)}-1\big)}.
\end{aligned}
$$

である. (21) を (12) に代入すれば, (7) が得られる. □

系 2 の証明. (3) から

$$
\begin{aligned}
|u(t,x)| &= |A(t)|\Big(\frac{m_1}{2\pi t}\Big)^{n/2},\\
|v(t,x)| &= |B(t)|\Big(\frac{m_2}{2\pi t}\Big)^{n/2}
\end{aligned}
$$

であるから, $K = 0$ のときは (17) を, $K \neq 0$ のときは (21) をそれぞれ用いれば示される. □

参考文献

[1] G. P. Agrawal, Nonlinear Fiber Optics, 2nd Ed., Academic Press, 1995 (小田垣孝, 山田興一訳, 非線形ファイバー光学, 原書第 2 版, 吉岡書店, 1997)[*11].

[2] V. Banica and L. Vega, On the Dirac delta as initial condition for nonlinear Schrödinger equations, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **25** (2008), 697–711.

[3] I. Bejenaru and T. Tao, Sharp well-posedness and ill-posedness results for a quadratic non-linear Schrödinger equation, J. Funct. Anal. **233** (2006), 228–259.

[4] T. Cazenave and F.B. Weissler, The Cauchy problem for the critical nonlinear Schrödinger equation in H^s, Nonlinear Anal. TMA **14** (1990), 807–836.

[5] K. Doi, S. Shimizu, Explicit solutions for a system of nonlinear Schrödinger equations with delta functions as initial data, Differential Integral Equations **32** (2019), 359–367.

[6] J. Ginibre and G. Velo, On a class of nonlinear Schrödinger equations, J. Funct. Anal. **32** (1979), 1–71.

[7] N. Hayashi, Classical solutions of nonlinear Schrödinger equations., Manuscripta Math. **55** (1986), 171–190.

[*11] 原書は版を重ね, 2019 年に 6th edition が出版された.

[8] N. Hayashi, C. Li, and P.I. Naumkin, On a system of nonlinear Schrödinger equations in 2d, Differential Integral Equations **24** (2011), 417–434.

[9] K. Hidano, Nonlinear Schrödinger equations with radially symmetric data of critical regularity, Funkcial. Ekvac. **51** (2008), 135–147.

[10] T. Kato, On nonlinear Schrödinger equations, Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor. **46** (1987), 113–129.

[11] T. Kato, On nonlinear Schrödinger equations. II. H^s-solutions and unconditional well-posedness, J. Anal. Math. **67** (1995), 281–306.

[12] C.E. Kenig, G. Ponce, and L. Vega, On the ill-posedness of some canonical dispersive equations, Duke Math. J. **106** (2001), 617–633.

[13] C.E. Kenig, G. Ponce, and L. Vega, Quadratic forms for the 1-D semilinear Schrödinger equation, Trans. Amer. Math. Soc. **348** (1996), 3323–3353.

[14] N. Kishimoto, Local well-posedness for the Cauchy problem of the quadratic Schrödinger equation with nonlinearity $\overline{u}^2$, Comm. Pure Appl. Anal. **7** (2008), 1123–1143.

[15] N. Kita, Mode generating property of solutions to the nonlinear Schrödinger equations in one space dimension, in *Nonlinear dispersive equations*. Ozawa, T. and Tsutsumi, Y. (Eds.), GAKUTO Internat. Ser. Math. Sci. Appl. 26, Gakkōtosho, Tokyo, 2006, 111–128.

[16] 北直泰, δ 関数を初期データに持つ非線形 Schrödinger 方程式について, 数学 **62** (2010), 329–345.

[17] N. Kita and S. Shimizu, A system of nonlinear Schrödinger equations with delta-functions as initial data, 数理解析研究所講究録 **2122** (2019), 76–91.

[18] M. Nakamura and T. Ozawa, Nonlinear Schrödinger equations in the Sobolev space of critical order, J. Funct. Anal. **155** (1998), 364–380.

[19] T. Ozawa and H. Sunagawa, Small data blow-up for a system of nonlinear Schrödinger equations, J. Math. Anal. Appl. **399** (2013), 147–155.

[20] H. Pecher, Solutions of semilinear Schrödinger equations in H^s, Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor. **67** (1997), 259–296.

[21] Y. Tsutsumi, L^2-solutions for nonlinear Schrödinger equations and nonlinear groups, Funkcial. Ekvac. **30** (1987), 115–125.

[22] Y. Tsutsumi, Global strong solutions for nonlinear Schrödinger equations, Nonlinear Anal. TMA **11** (1987), 1143–1154.

[23] H. Uchizono and T. Wada, Continuous dependence for nonlinear Schrödinger equation in H^s, J. Math. Sci. Univ. Tokyo **19** (2012), 57–68.

[24] H. Uchizono and T. Wada, On well-posedness for nonlinear Schrödinger equations with power nonlinearity in fractional order Sobolev spaces, J. Math. Anal. Appl. **395** (2012), 56–62.

[25] T. Wada, Solutions to nonlinear Schrödinger equations for special initial data, Electron. J. Differential Equations **2015** (2015), 1–6.

A remark on a system of nonlinear Schrödinger equations with delta functions as initial data

Kazuyuki DOI*1 and Shoji SHIMIZU*2

Summary

We study a system of nonlinear Schrödinger equations with delta functions as initial data. We obtain the special solution by following the argument in [5], and we show that its blow-up time relies on the relationship of each initial data and nonlinear coupling constants.

Key Words: nonlinear Schrödinger system, delta functions, blow-up solutions, conservation law

*1 Center for Liberal Arts and Sciences, Faculty of Engineering, Toyama Prefectural University
*2 Graduate School of Maritime Sciences, Kobe University