

可換・非可換変換の厳密表現

中村 誠（富山大学理学部）・角 嶋 浩（富山大学工学部）

・ 戸田晃一（工学部教養教育センター／慶應義塾大学自然科学研究教育センター）

・ 戸田晃一（工学部教養教育センター／慶應義塾大学自然科学研究教育センター）

任意の次元における非可換位相空間上の量子力学のこれまでなされた研究では、座標のみ非可換にしたものが多くみられる。これら座標のみを非可換にした場合の非可換量子力学は、可換変数から非可換変数への変換を用いることにより、可換位相空間上の量子力学として取り扱えることが知られている。

本稿では、座標の非可換性に加えて運動量の非可換性を導入することで、座標のみ非可換の場合と同様に、可換位相空間上の量子力学として取り扱えるように座標同士と運動量同士を同時に非可換とした場合の可換・非可換変換の表式を与える。

キーワード：非可換位相空間の量子力学，量子力学の数理

1. はじめに

弦理論において時空の非可換性が提案された。行列模型においては、D-brane や弦を自由度に含む行列自体が空間も生成しているため、本質的に非可換の理論となる。Seiberg-Witten は、背景場がある D-brane の有効理論が非可換ゲージ理論になることを示した [1]。これは、“背景

場のある可換な空間上のゲージ理論”が、“非可換空間上のゲージ理論”と等価であると主張したことになる。さらに、Planck スケールにおける時空の特徴として、非可換幾何学が現れると考えられている。このような理論の様々な理論物理的側面や数理物理的側面については、弦理論 [2–6] と量子重力 [7, 8]，場の量子論 [9–17]，および非相対論的量子力学 [18–38] で研究されてきた。さらに、その他の話題や総説

も数多く報告されている [39–46].

位相空間の従来の座標と運動量に非可換性を導入したときにどのような効果が現れるかについても多くの研究が行われ、非可換量子力学 [10–12, 19–21, 23–26] についての広範な研究が行われている。また、非可換空間における量子力学は多くの注目を集めており、 N 次元非可換空間は、以下の交換関係：

$$\begin{aligned} [q_i, q_j] &= i\theta_{ij}, \\ [q_i, p_j] &= i\delta_{ij}, \\ [p_i, p_j] &= 0 \end{aligned}$$

をもつ。ここで、 θ を $N \times N$ 反対称行列とし、 δ_{ij} を Kronecker のデルタとする。また、 i は虚数単位である。以下に示すように、非可換変数 q_i と p_i ($i = 1, \dots, N$) は

$$\begin{cases} q_i = Q_i - \sum_{j=1}^N \frac{1}{2} \theta_{ij} P_j, \\ p_i = P_i \end{cases} \quad (1)$$

のように可換変数 Q_i と P_i で表すことができる [28, 39, 40]。もちろん、 Q_i と P_i は、以下の交換関係：

$$\begin{aligned} [Q_i, Q_j] &= 0, \\ [Q_i, P_j] &= i\delta_{ij}, \\ [P_i, P_j] &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

を満たす。変換 (2) は、“Bopp シフト”として知られており、非可換位相空間上の Hamiltonian は

$$H(q, p) = H \left(Q_i - \sum_{j=1}^N \frac{1}{2} \theta_{ij} P_j, P_i \right)$$

とかける。また、古典的な非可換 Lagrangian は、可換系の座標と運動量を用いて、

$$L = P_i \dot{Q}_i - H \left(Q_i - \sum_{j=1}^N \frac{1}{2} \theta_{ij} P_j, P_i \right)$$

とかくことができる。さらに、(1) の逆変換を用いれば、非可換変数でかかれた古典的 Lagrangian [39, 40] を得ることができ、得られた系は拘束条件をもち、非可換変数の交換関係は Dirac 括弧として現れる。

通常非可換位相空間では、運動量は交換するものとして扱われる。我々は、非可換位相空間において、座標のみを非可換にすることは合理的ではないと考える。それは正準形式において、“座標” q とその共役な“運動量” p は、 $p(Q, P, t)$ と $q(Q, P, t)$ のようにかかれる。そして、このとき、“座標”と“運動量”は正準共役であり、それぞれの変数は独立 [47] であるからである。

本稿では、座標の非可換性に加えて運動量の非可換性を導入し、可換変数から (3) の非可換位相空間上の変数への厳密な変換を与える。非可換変数は、

$$\begin{aligned} [q_i, q_j] &= i\theta_{ij}, \\ [q_i, p_j] &= i\delta_{ij}, \\ [p_i, p_j] &= i\eta_{ij} \end{aligned} \quad (3)$$

なる交換関係を満たす。ただし、 θ と η は、 $N \times N$ 反対称行列である。類似した変換については、いくつかの論文 [29, 38] において示されているが、与えられた変

換は、一般の反対称行列 θ および η において交換関係 $[q_i, p_j]$ を満たさない.

次節では、可換位相空間の点を表現する座標から非可換位相空間の点を表現する座標への変換を与える. 第3節では、異なる非可換パラメータをもつ非可換位相空間同士に対する相似関係について議論する. そして、非可換位相空間上の量子力学について考える場合には、最もシンプルな非可換パラメータをもつ非可換位相空間での量子力学を採用すれば十分であることを示す.

2. 可換・非可換変換の厳密表現

非可換変数 q_i, p_i と可換変数 Q_i, P_i の間において、以下の変換:

$$\begin{cases} q_i = \sum_{j=1}^N (a_{ij} Q_j + b_{ij} P_j), \\ p_i = \sum_{j=1}^N (c_{ij} Q_j + d_{ij} P_j) \end{cases}$$

または、行列表現で

$$\begin{cases} q = aQ + bP, \\ p = cQ + dP \end{cases} \quad (4)$$

が成り立つとする. 式 (4) を非可換変数の交換関係 (3) に代入し、可換変数の交換関

係 (2) を用いることで、連立方程式:

$$\begin{aligned} ab^T - ba^T &= \theta, \\ ad^T - bc^T &= \mathbb{1}, \\ cd^T - dc^T &= \eta \end{aligned} \quad (5)$$

が得られる. ここで、 $\mathbb{1}$ は単位行列とし、添字 T は転置行列とする. この連立方程式 (5) において、係数行列 a, b, c, d の表式を得るために、以下の仮定:

$$\begin{aligned} a &= A(\theta\eta), \\ b &= B(\theta\eta)\theta, \\ c &= C(\eta\theta)\eta, \\ d &= D(\eta\theta) \end{aligned} \quad (6)$$

を課す. A と B (、または C と D) は、2つの行列の積 $\theta\eta$ (、または $\eta\theta$) の解析関数である. また、 $[f(\theta\eta)]^T = f(\eta\theta)$ が成り立ち、それぞれの関数が θ と η が “0” で連続である*2 を考慮する. このとき、仮定 (6) の下で、連立方程式 (5) は

$$\begin{aligned} -[A(\theta\eta)B(\theta\eta) + B(\theta\eta)A(\theta\eta)]\theta &= \theta, \\ A(\theta\eta)D(\theta\eta) + B(\theta\eta)C(\theta\eta)\theta &= \mathbb{1}, \\ \eta[C(\theta\eta)D(\theta\eta) + D(\theta\eta)C(\theta\eta)] &= \eta \end{aligned}$$

*1 一般に、 $\theta\eta$ と $\eta\theta$ は、定数行列ではない.

*2 非可換パラメータ θ と η は小さいと考えられるので、関数 A, B, C, D は “0” において連続であると仮定した.

と与えることができる^{*3}. この連立方程式から, 以下の関係式:

$$\begin{aligned} A(\theta\eta) B(\theta\eta) &= -\frac{1}{2} \mathbb{1}, \\ C(\theta\eta) D(\theta\eta) &= \frac{1}{2} \mathbb{1}, \\ A(\theta\eta) D(\theta\eta) &= \frac{\mathbb{1} \pm \sqrt{\mathbb{1} + \theta\eta}}{2}, \\ B(\theta\eta) C(\theta\eta) \theta\eta &= \frac{\mathbb{1} \mp \sqrt{\mathbb{1} + \theta\eta}}{2} \end{aligned}$$

が得られる. $(\mathbb{1} + \sqrt{\mathbb{1} \pm \theta\eta})/2$ も行列 $\theta\eta$ の解析関数で, この変換が $\theta\eta = -\mathbb{1}$ のときに逆変換をもたないことは容易に確かめられる. さらに, 変換 (4) が以下の表式:

$$\begin{cases} q = A(\theta\eta) Q - \frac{1}{2} (A(\theta\eta))^{-1} \theta P, \\ p = D(\eta\theta) P + \frac{1}{2} (D(\eta\theta))^{-1} \eta Q, \\ A(\theta\eta) D(\theta\eta) = \frac{\mathbb{1} + \sqrt{\mathbb{1} + \theta\eta}}{2} \end{cases} \quad (7)$$

をもち, 逆変換^{*4} が,

$$\begin{cases} Q = \left(\sqrt{\mathbb{1} + \theta\eta} \right)^{-1} \{ D(\theta\eta) q \\ \quad + \frac{1}{2} (A(\theta\eta))^{-1} \theta p \}, \\ P = \left(\sqrt{\mathbb{1} + \eta\theta} \right)^{-1} \{ A(\eta\theta) p \\ \quad - \frac{1}{2} (D(\eta\theta))^{-1} \eta q \} \end{cases}$$

となることがわかる. この変換は, 任意の非可換パラメータ θ, η をもつ非可換位相

空間と “普通” の位相空間を関係付けるもので, $\theta \rightarrow 0$ かつ $\eta \rightarrow 0$ において可換極限をもつことは容易に確認できる.

3. 非可換位相空間同士に対する相似関係

本節では, まず以下の変換:

$$\begin{aligned} \bar{q} &\equiv s q, \\ \bar{p} &\equiv (s^{-1})^T p \end{aligned}$$

を考える. ここで, s は任意のユニタリではない, つまり $s^\dagger s \neq \mathbb{1}$ であるような, 正則行列とする. このとき, 位相空間上の変数 \bar{q} と \bar{p} は, 交換関係:

$$\begin{aligned} [\bar{q}_i, \bar{q}_j] &= i \bar{\theta}_{ij}, \\ [\bar{q}_i, \bar{p}_j] &= i \delta_{ij}, \\ [\bar{p}_i, \bar{p}_j] &= i \bar{\eta}_{ij} \end{aligned}$$

を満たす. もちろん, $\bar{\theta} \equiv s \theta s^T$ と $\bar{\eta} \equiv (s^{-1})^T \eta s^{-1}$ は反対称行列である. つまり, 変数 (\bar{q}, \bar{p}) は非可換の交換関係をもつ.

同じ s を用いて, 可換変数を $\bar{Q} \equiv s Q$, $\bar{P} \equiv (s^{-1})^T P$ と変換しても, 交換関係は変わらない. よって, 変換 (7) は

$$\begin{cases} \bar{q} = A(\bar{\theta}\bar{\eta}) \bar{Q} - \frac{1}{2} (A(\bar{\theta}\bar{\eta}))^{-1} \bar{\theta} \bar{P}, \\ \bar{p} = D(\bar{\eta}\bar{\theta}) \bar{P} + \frac{1}{2} (D(\bar{\eta}\bar{\theta}))^{-1} \bar{\eta} \bar{Q}, \\ A(\bar{\theta}\bar{\eta}) D(\bar{\theta}\bar{\eta}) = \frac{\mathbb{1} + \sqrt{\mathbb{1} + \bar{\theta}\bar{\eta}}}{2} \end{cases} \quad (8)$$

^{*3} 任意の解析関数 X について, $X(\theta\eta)\theta = \theta X(\eta\theta)$ と $X(\eta\theta)\eta = \eta X(\theta\eta)$ が成立する.

^{*4} $\sqrt{\mathbb{1} + \theta\eta}$ と $\sqrt{\mathbb{1} + \eta\theta}$ はそれぞれ $\theta\eta$ と $\eta\theta$ の解析関数である.

とかくことができる. つまり, 異なった非可換パラメータをもつ非可換位相空間は, 互いに相似関係にある. また, ある正方行列 A とその転置行列は相似の関係にあり, この転置行列の相似変換を満たす正則行列 P は, 正規行列とその転置行列の積, $P \equiv s^T s$, として与えることができる. したがって,

$$\begin{aligned} (\theta \eta)^T &= P(\theta \eta) P^{-1}, \\ \eta \theta &= (s^T s) \theta \eta (s^T s)^{-1}, \\ (s^T)^{-1} \eta \theta (s^T) &= s \theta \eta s^{-1}, \\ (s^T)^{-1} \eta s^{-1} s \theta (s^T) \\ &= s \theta (s^T) (s^T)^{-1} \eta s^{-1} \end{aligned}$$

という結果が得られる.

以上より, 反対称行列 $\theta' \equiv s \theta s^T$ と $\eta' \equiv (s^{-1})^T \eta s^{-1}$ が同時対角化可能であることが示された. さらに, $\theta \eta$ が反対称行列 α の積で表せることもわかる. つまり,

$$s \theta \eta s^{-1} = \begin{cases} \alpha^2, \\ \alpha^T \alpha = -\alpha^2 \end{cases}$$

を満たす s が存在し, この s を用いて, (8) は,

$$\begin{cases} \bar{q} = A(\alpha^2) \bar{Q} - \frac{1}{2} (A(\alpha^2))^{-1} \alpha \bar{P}, \\ \bar{p} = D(\alpha^2) \bar{P} \pm \frac{1}{2} (D(\alpha^2))^{-1} \alpha \bar{Q}, \\ A(\alpha^2) D(\alpha^2) = \frac{\mathbb{1} + \sqrt{\mathbb{1} \pm \alpha^2}}{2} \end{cases} \quad (9)$$

とできる. このとき, (9) より (\bar{q}, \bar{p}) は,

以下の交換関係:

$$\begin{aligned} [\bar{q}_i, \bar{q}_j] &= \mathbb{1} \alpha_{ij}, \\ [\bar{q}_i, \bar{p}_j] &= \mathbb{1} \delta_{ij}, \\ [\bar{p}_i, \bar{p}_j] &= \pm \mathbb{1} \alpha_{ij} \end{aligned} \quad (10)$$

をもつ.

s による任意の非可換パラメータをもつ非可換位相空間から別の非可換パラメータをもつ位相空間への変換は相似変換であり, つまり, (q, p) と (\bar{q}, \bar{p}) は相似関係をもつ. 注意すべき点は, $\theta \eta \neq 0$ を満たす異なった 2 つの非可換位相空間同士と, $\theta \eta = 0$ を満たす異なった 2 つの非可換位相空間同士はそれぞれ相似関係をもつが, $\theta \eta \neq 0$ と $\theta \eta = 0$ の 2 つを結ぶ相似変換は存在しないことである.

さらに, 可換・非可換変換 (7) において,

$$A(\theta \eta) = D(\theta \eta) \equiv X(\theta \eta)$$

である場合について考える. このとき,

$$X(\theta \eta) = \sqrt{\frac{\mathbb{1} + \sqrt{\mathbb{1} + \theta \eta}}{2}}$$

とすると, 適当な (q, p) から (\bar{q}, \bar{p}) への相似変換を用いれば, 交換関係 (10) を満たすものが得られる. 加えて, 反対称行列 α は適当な直交行列を用いれば, α_{BD} とブロック対角化可能であるから, (q, p) と (q_{BD}, p_{BD}) も相似関係にある. よって, 変換 (7) と (9) は厳密な行列表現 (線形形式) でかけることが示され, このときの

行列表現は,

$$\left\{ \begin{array}{l} q_{\text{BD}} = X(\alpha_{\text{BD}}^2) Q \\ \quad - \frac{1}{2} (X(\alpha_{\text{BD}}^2))^{-1} \alpha_{\text{BD}} P, \\ p_{\text{BD}} = X(\alpha_{\text{BD}}^2) P \\ \quad \pm \frac{1}{2} (X(\alpha_{\text{BD}}^2))^{-1} \alpha_{\text{BD}} Q, \\ X(\alpha_{\text{BD}}^2) \equiv \sqrt{\frac{\mathbb{1} + \sqrt{\mathbb{1} \pm \alpha_{\text{BD}}^2}}{2}} \end{array} \right.$$

と与えられる. ここに現れる

$$\alpha_{\text{BD}} = \text{BlockDiag}[\alpha_{\text{B}_1}, \dots, \alpha_{\text{B}_i}, \\ 0, \dots, 0]$$

は, ブロック対角行列で, α_{B_i} と 0 は, それぞれ 2×2 の反対称行列 と 零行列である. また, α_{B_i} は $\alpha_i \epsilon_{ab}$ ($a, b = 1, 2$) のように 2 次元 Levi-Civita 記号を用いてかけるので, $X(\alpha_{\text{BD}}^2)$ は,

$$X(\alpha_{\text{BD}}^2) = \text{Diag}[X_1, \dots, X_n, \\ \mathbb{1}, \dots, \mathbb{1}]$$

と

$$X_i \equiv \left[\sqrt{(1 + \sqrt{1 \mp \alpha_i^2})/2} \right] \mathbb{1}$$

を用いて表せる. $(q_{\text{BD}}, p_{\text{BD}})$ の交換関係が

$$\begin{aligned} [\bar{q}_{\text{BD}}, \bar{q}_{\text{BD}}] &= \mathbb{1} \alpha_{\text{BD}}, \\ [\bar{q}_{\text{BD}}, \bar{p}_{\text{BD}}] &= \mathbb{1} \mathbb{1}, \\ [\bar{p}_{\text{BD}}, \bar{p}_{\text{BD}}] &= \pm \mathbb{1} \alpha_{\text{BD}} \end{aligned} \quad (11)$$

となることは容易に確かめられる.

これらの結果から, $\alpha^2 \neq 0$ ($\theta\eta \neq 0$) を満たす非可換位相空間は, $(q_{\text{BD}}, p_{\text{BD}})$ と

相似であるから, 非可換位相空間の違いとは α_{BD}^2 によって区別される. つまり, 交換関係 (11) をもつ非可換位相空間上の量子力学が, 非可換位相空間上の量子力学の基礎となる. 任意の非可換変数 q と p は正則行列 s を用いて, $q \equiv s q_{\text{BD}}$ と $p \equiv (s^{-1})^T p_{\text{BD}}$ のように表せる.

4. まとめ

座標・座標と運動量・運動量に対する非可換性を同時に導入した場合において, 任意の次元における可換・非可換変換の厳密な線形表式 (7) を得た. また, 任意の非可換位相空間を取り扱う場合には最もシンプルな非可換パラメータをもつ場合を考えれば十分で, この最もシンプルな場合には, 2 次元非可換位相空間と可換位相空間の直和で表せることを示した.

本研究に関するより詳細な結果の報告やそれらの応用例は, 参考文献 [48, 49] にある.

謝 辞

本研究の一部は, 「富山県立大学・2019 年度および 2020 年度奨励研究費 (萌芽)」の助成を受けたものである.

参考文献

- [1] N. Seiberg and E. Witten;
JHEP, **9**, 032 (1999).
- [2] A. Connes, M. Douglas and A. S. Schwarz;
JHEP, **2**, 003 (1998).
- [3] C. S. Chu and P. M. Ho;
Nucl. Phys., **B 550**, 151 (1999).
- [4] C. S. Chu and P. M. Ho;
Nucl. Phys., **B 568**, 447 (2000).
- [5] F. Ardalan, H. Arfaei and M. M. Sheikh-Jabbari;
Nucl. Phys., **B 576**, 578 (2000).
- [6] J. Jing and Z.-W. Long;
Phys. Rev., **D 72**, 126002 (2005).
- [7] C. Bastos and O. Bertolami;
Phys. Lett., **A 372**, 5556 (2008).
- [8] O. Bertolami and C. Zarro;
Phys. Lett., **B 673**, 83 (2009).
- [9] H. O. Girotti;
hep-th/0301237.
- [10] M. Chaichian, A. Demichev, P. Presnajder, M. M. Sheikh-Jabbari and A. Tureanu;
Nucl. Phys., **B 611**, 383 (2001).
- [11] M. Chaichian, A. Demichev, P. Presnajder, M. M. Sheikh-Jabbari and A. Tureanu;
Phys. Lett., **B 527**, 149 (2002).
- [12] M. Chaichian, M. M. Seikh-Jabbari and A. Tureanu;
Phys. Rev. Lett., **86**, 2716 (2001).
- [13] M. R. Douglas and N. A. Nekrasov;
Rev. Mod. Phys., **73**, 977 (2001).
- [14] M. Van Raamsdonk and N. Seiberg;
JHEP, **3**, 035 (2000).
- [15] R.J. Szabo;
Phys. Rept., **378**, 207 (2003).
- [16] R. Gopakumar, S. Minwalla and A. Strominger;
JHEP, **5**, 020 (2000).
- [17] S. Minwalla, M. Van Raamsdonk and N. seiberg;
JHEP, **2**, 020 (2000).
- [18] A. Smailagic and E. Spallucci;
Phys. Rev., **D 65**, 107701 (2002).
- [19] B. Morariu and A. P. Polychronakos;
Nucl. Phys., **B 610**, 531 (2001).
- [20] B. Morariu and A. P. Polychronakos;
Nucl. Phys., **B 634**, 326 (2002).

- [21] B. Muthukumar and P. Mitra;
Phys. Rev., **D 66**, 027701 (2002).
- [22] F. Delduc, Q. Duret, F. Gieres and M. Lefrançois;
J. Phys. Conf. Ser., **103** 012020 (2008).
- [23] G. V. Dunne, J. Jackiw and C. Trugenberger;
Phys. Rev., **D 41**, 661 (1990).
- [24] J. Gamboa, M. Loewe and J. Rojas;
Phys. Rev., **D 64**, 067901 (2001).
- [25] J. Gamboa, M. Loewe, F. Mendez and J. Rojas;
Mod. Phys. Lett., **A 16**, 2075 (2001).
- [26] J. Gamboa, M. Loewe, F. Mendez and J. Rojas;
Int. J. Mod. Phys., **A 17**, 2555 (2002).
- [27] K. Bolonek and P. Kosiński;
Phys. Lett., **B 547**, 51 (2002).
- [28] L. Mezincescu;
[hep-th/0007046](#).
- [29] M. Demetrian and D. Kochan;
Acta Phys. Slov., **52**, 1 (2002).
- [30] O. Bertolami, J.G. Rosa, C. Aragão, P. Castorina and D. Zappalà;
Mod. Phys. Lett., **A 21**, 795 (2006).
- [31] P. Kosiński and K. Bolonek;
Acta Phys. Polon., **B34**, 2575 (2003).
- [32] S.M. Carroll, J.A. Harvey, V.A. Kostelecky, C.D. Lane and T. Okamoto;
Phys. Rev. Lett., **87**, 141601 (2001).
- [33] S. Dey, A. Fring, L. Gouba and P.G. Castro;
Phys. Rev., **D 87**, 084033 (2013).
- [34] S. Dey;
Phys. Rev., **D 91**, 044024 (2015).
- [35] S. Dey, A. Fring and V. Hussin;
Int. J. Mod. Phys., **B 31**, 1650248 (2017).
- [36] S. Dey, A. Fring and V. Hussin;
Springer Proc. Phys., **205**, 209 (2018).
- [37] V.P. Nair and A.P. Polychronakos;
Phys. Lett., **B 505**, 267 (2001).
- [38] J.-Z. ZHANG;
Phys. Lett., **B 584**, 204 (2004).
- [39] A.A. Deriglazov;
Phys. Lett., **B 530**, 235 (2002).

- [40] A.A. Deriglazov;
hep-th/0208072.
- [41] A. Connes;
Academic Press (1994).
- [42] C. Bastos, A. Bernardini, O. Bertolami, N.C. Dias and J.N. Prata;
Physical Review, **D 88**, 085013 (2013).
- [43] J. Madore;
Cambridge University Press (2002).
- [44] I. Hinchliffe, N. Kersting, and Y. L. Ma;
Int. J. Mod. Phys., **A 19**, 179 (2004).
- [45] D. Karabali, V. P. Nair and A. P. Polychronakos;
Nucl. Phys., **B 627**, 565 (2002).
- [46] O. Bertolami, J. G. Rosa, C. M. L. de Aragão, P. Castorina and D. Zappalà;
Phys.Rev., **D72**, 025010 (2005).
- [47] L. D. Landau and E. M. Lifshitz;
Mechanics, **3rd Edition** (1982).
- [48] M. Nakamura and H. Kakuata;
arXiv:1403.2171.
- [49] M. Nakamura, H. Kakuata and K. Toda;
Proceedings of the International Conference on Geometry, Integrability and Quantization に掲載予定.

An exact representation of noncommutative phase space

Makoto Nakamura^{*}, Hiroshi Kakuhashi[†] and Kouichi TODA^{‡§}

Summary

Noncommutative phase space of arbitrary dimension is considered. The both of operators in coordinates and momenta on noncommutative phase space may be noncommutative.

In this paper, we introduce momentum-momentum noncommutativity in addition to coordinate-coordinate one. We find an exact form for the linear coordinate transformation, which relates a noncommutative phase space to the corresponding ordinary one.

Key Words: *Quantum mechanics on noncommutative phase space, Mathematics on quantum mechanics*

^{*} Faculty of Science, University of Toyama

[†] Faculty of Engineering, University of Toyama

[‡] Faculty of Engineering, Toyama Prefectural University

[§] Research and Education Center for Natural Sciences, Keio University