続　可換・非可換変換の厳密表現

中村　誠（富山県立大学工学部）・角畠　浩（富山大学工学部）
・戸田晃一（工学部教養教育センター／慶應義塾大学自然科学研究教育センター）

これまでに任意の次元における非可換位相空間上の量子力学が多くなされた．これらの研究の多くは座標のみ非可換にしたものが多くみられ，可換変数から非可換変数への変換を用いて可換位相空間上の量子力学として取り扱う．一方で，これまでの我々の研究では，座標の非可換性に加えて運動量の非可換性を導入し，(座標のみ非可換の場合と同様に,) 可換位相空間上の量子力学として取り扱えるように，座標同士と運動量同士を同時に非可換とした場合の可換・非可換変換の表式を示し，最も単純な非可換位相空間について考慮すれば十分であることを示した．

本論文では，最も単純な非可換位相空間は二次元非可換位相空間と可換位相空間の直積で表せることから，二次元非可換位相空間についてのみ考慮し，このときの可換・非可換変換がスピノルに対する Lorentz 変換-like な形で表せることを示し，座標のみ非可換になる場合への拡張も可能であることを示す．

キーワード:　非可換位相空間の量子力学，　量子力学の数理

1　はじめに

これまでに，弦理論において時空の非可換性が提案された．行列模型において D-brane や弦を自由度に含む行列自体が空間も生成しているため本質的に非可換の理論となる．Seiberg-Witten は，背景場がある D-brane の有効理論が非可換ゲージ理論になることを示した [1]．これは，“背景場のある可換な空間上のゲージ理論” が，“非可換空間上のゲージ理論” と等価であると主張したことになる．さらに，Planck スケールにおいて時空の特徴として，非可換幾何学が現れると考えられている．この

ような理論の様々な側面は，量子重力 [2,3] と 弦理論 [4–8]，場の量子論 [9–17]，および 非相対論的量子力学 [18–39] で研究されてきた．

また，位相空間の従来の座標と運動量に非可換性を導入したときに，どのような効果が現れるかについても多くの研究が行われ，非可換量子力学 [10–12,19–21, 23–26] についても広範な研究が行われている．

非可換空間における量子力学は多くの注目を集めており，N 次元非可換空間は，以下の交換関係：

$$\begin{aligned}[][q_i,\ q_j] &= \mathrm{i}\,\theta_{ij},\\ [q_i\ ,p_j] &= \mathrm{i}\,\delta_{ij},\\ [p_i,\ p_j] &= 0\end{aligned}$$

をもつ．ここで，i は虚数単位であり，θ は $N\times N$ 反対称行列である．以下に示すように，非可換変数 q_i と p_i は，$i=1,\ldots,N$ として，

$$\begin{cases} q_i = Q_i - \displaystyle\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{2}\theta_{ij}P_j, \\ p_i = P_i \end{cases} \tag{1}$$

のように可換変数 Q_i と P_i で表すことができる [29,40,41]. Q_i と P_i は以下の交換関係：

$$\begin{aligned}[][Q_i,\ Q_j] &= 0,\\ [Q_i,\ P_j] &= \mathrm{i}\,\delta_{ij},\\ [P_i,\ P_j] &= 0\end{aligned} \tag{2}$$

を満たす．この変換は “Bopp シフト”として知られている．このとき，非可換位相空間上の Hamiltonian は，

$$H(q,\ p) = H\left(Q_i - \sum_{j=1}^{N}\frac{1}{2}\theta_{ij}P_j,\ P_i\right)$$

で与えられる．また，古典的な非可換 Lagrangian は，可換系の座標と運動量を用いて，

$$L = P\dot{Q} - H\left(Q - \frac{P}{2}\theta,\ P\right)$$

とかくことができる．さらに，(1) の逆変換を用いれば，非可換変数でかかれた古典的 Lagrangian [40, 41] を得ることができ，得られた系は拘束条件をもち，非可換変数の交換関係は Dirac 括弧として現れる．

通常の非可換位相空間では，運動量は交換するものとして扱われる．我々は非可換位相空間において座標のみを非可換にすることは合理的ではないと考える．それは正準形式において，“座標” q とその共役な”運動量 ”p は $p(Q,P,t)$ と $q(Q,P,t)$ のようにかかれる．したがって，“座標” と “運動量”は正準共役であり，それぞれの変数は独立 [42] である，からである．

これまでの研究において，座標の非可換性に加えて運動量の非可換性を導入し，可換変数から以下に示す交換関係を満たす非可換位相空間上の変数への厳密な変換を示した．非可換変数は，

$$\begin{aligned}[][q_i,\ q_j] &= \mathrm{i}\,\theta_{ij},\\ [q_i\ ,p_j] &= \mathrm{i}\,\delta_{ij},\\ [p_i,\ p_j] &= \mathrm{i}\,\eta_{ij}\end{aligned} \tag{3}$$

なる交換関係を満たす．ここに現れる θ と η は，$N\times N$ 反対称行列である．類似した変換については，いくつかの先行研究論文 [28,30,39] において示されているが, それらで示された変換は一般の反対称行列 θ および η において交換関係 $[q_i,\ p_j]=\mathrm{i}\delta_{ij}$ を満たさない．

条件(3)の下で「可換・非可換変換の厳密解」が，

$$\begin{cases} q = A(\theta\,\eta)\,Q - \dfrac{1}{2}(A(\theta\,\eta))^{-1}\theta\,P, \\ \\ p = D(\eta\theta)\,P + \dfrac{1}{2}(D(\eta\theta))^{-1}\eta\,Q \\ \end{cases} \tag{4}$$

と与えらることが示される．ここで，$\mathbb{1}$は単位行列であり，θとηは$N \times N$反対称行列を表す．また，AとB（，CとD）は2つの行列の積$\theta\eta$（もしくは$\eta\theta$）の解析関数であり，

$$A(\theta\,\eta)\,D(\theta\,\eta) = \frac{\mathbb{1} + \sqrt{\mathbb{1} + \theta\,\eta}}{2}$$

の条件を満たす必要がある．この変換において，条件(4)を，

$$\begin{aligned} A(\theta\,\eta) &= D(\theta\,\eta) \\ &\equiv X(\theta\,\eta) \\ &= \sqrt{\frac{\mathbb{1} + \sqrt{\mathbb{1} + \theta\,\eta}}{2}} \end{aligned}$$

とおいても一般性を失わない．また，適当な$(q,\ p)$から$(\bar{q},\ \bar{p})$への相似変換を用いれば，交換関係は，

$$\begin{aligned} &[\bar{q}_{\mathrm{BD}},\ \bar{q}_{\mathrm{BD}}] = \mathrm{i}\,\alpha_{\mathrm{BD}}, \\ &[\bar{q}_{\mathrm{BD}}\ ,\bar{p}_{\mathrm{BD}}] = \mathrm{i}\,\mathbb{1}, \\ &[\bar{p}_{\mathrm{BD}},\ \bar{p}_{\mathrm{BD}}] = \pm\,\mathrm{i}\,\alpha_{\mathrm{BD}} \end{aligned}$$

となり，可換・非可換変換は，

$$\begin{cases} q_{\mathrm{BD}} \\ \quad = X(\alpha_{\mathrm{BD}}^2)\,Q - \dfrac{1}{2}(X(\alpha_{\mathrm{BD}}^2))^{-1}\,\alpha_{\mathrm{BD}}\,P, \\ p_{\mathrm{BD}} \\ \quad = X(\alpha_{\mathrm{BD}}^2)\,P \pm \dfrac{1}{2}(X(\alpha_{\mathrm{BD}}^2))^{-1}\,\alpha_{\mathrm{BD}}\,Q \end{cases} \tag{5}$$

となることがわかる．ここで，

$$X(\alpha_{\mathrm{BD}}^2) \equiv \sqrt{\frac{\mathbb{1} + \sqrt{\mathbb{1} \pm \alpha_{\mathrm{BD}}^2}}{2}}$$

であり，α_{BD}はブロック対角行列：

$$\alpha_{\mathrm{BD}} = \begin{pmatrix} \alpha_{\mathrm{B}_1} & & & & & & \\ & \alpha_{\mathrm{B}_2} & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & \alpha_{\mathrm{B}_n} & & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

で与えらる．また，ここに現れるα_{B_i}は，反対称行列：

$$\alpha_{\mathrm{B}_i} \equiv \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_i \\ \alpha_i & 0 \end{pmatrix}$$

である．これらの結果より，非可換位相空間上の量子力学について考える場合には，最もシンプルな非可換パラメータをもつ非可換位相空間での量子力学を採用すれば十分であることを示した．この結果は，N次元非可換位相空間は2次元非可換位相空間の直積と可換位相空間の直積を用いて表せることを示しており，2次元非可換位相空間についての理解がN次元非可換位相空間への理解につながることがわかる．

本論文では，とくに2次元非可換位相空間について調べ，変換(5)が2次元非可換位相空間において，Loretnz変換-likeな形で表せることを示す．

[1]一般に，$\theta\,\eta$と$\eta\,\theta$は定数行列ではない．

2 Lorentz変換likeな表現と 2次元非可換位相空間

本節では，2次元非可換位相空間について考える．

2次元非可換位相空間では，交換関係は，

$$\begin{aligned}&[q_i,\ q_j] = \mathrm{i}\,\theta\,\epsilon_{ij},\\&[p_i,\ p_j] = \mathrm{i}\,\eta\,\epsilon_{ij},\\&[q_i,\ p_j] = \mathrm{i}\,\delta_{ij},\\&\text{other} = 0 \quad (i,\ j = 1, 2)\end{aligned}$$

と与えられる．ここで，ϵ_{ij} は 2 次元における Levi-Civita の記号である．これまでの研究から $\theta = \eta \equiv \alpha$，$\theta = -\eta \equiv \alpha$ となる場合についてのみ考えれば十分である．よって，これらの場合を含めた可換変数を非可換変数に変換する線形変換は，

$$\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = T_\alpha \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ P_1 \\ P_2 \end{pmatrix} \tag{6}$$

である．ここに現れる変換行列 T_α は，

$$T_\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(\tau_{\alpha\beta})_{1\leqq\alpha\leqq4,1\leqq\beta\leqq4}$$

であり，成分 $\tau_{\alpha\beta}$ は，

$$\begin{aligned}&\tau_{11} = \tau_{22} = \tau_{33} = \tau_{44} = x_\pm(\alpha),\\&\tau_{14} = -\tau_{23} = -\frac{\alpha}{x_\pm(\alpha)},\\&\tau_{32} = -\tau_{41} = \mp\frac{\alpha}{x_\pm(\alpha)},\\&\text{other} = 0\end{aligned}$$

（複合同順） であり，$(\tau_{\alpha\beta})_{1\leqq\alpha\leqq4,1\leqq\beta\leqq4}$ は，

$$\begin{pmatrix} x_\pm(\alpha) & 0 & 0 & -\frac{\alpha}{x_\pm(\alpha)} \\ 0 & x_\pm(\alpha) & \frac{\alpha}{x_\pm(\alpha)} & 0 \\ 0 & \mp\frac{\alpha}{x_\pm(\alpha)} & x_\pm(\alpha) & 0 \\ \pm\frac{\alpha}{x_\pm(\alpha)} & 0 & 0 & x_\pm(\alpha) \end{pmatrix}$$

となる．ここで，$x_\pm(\alpha)$ を，

$$x_\pm(\alpha) = \sqrt{\mathbb{1} + \sqrt{\mathbb{1} \pm \alpha^2}} \quad \text{（複合同順）}$$

とする．

まず，$x_+(\alpha)$（$\theta = -\eta$）となる場合について考察する．

このとき，交換関係は，

$$\begin{aligned}&[q_i,\ q_j] = \mathrm{i}\,\alpha\,\epsilon_{ij},\\&[p_i,\ p_j] = -\mathrm{i}\,\alpha\,\epsilon_{ij},\\&[q_i,\ p_j] = \mathrm{i}\,\delta_{ij},\\&\text{other} = 0 \quad (i,\ j = 1, 2)\end{aligned}$$

となる．このとき，$\alpha = \tan(\phi)$ とすると，(6) においての変換行列 $T_\alpha = T_{\tan(\phi)}$ は，

$$T_{\tan(\phi)} = \sqrt{\sec(\phi)}\,(\tau_{\alpha\beta})_{1\leqq\alpha\leqq4,1\leqq\beta\leqq4} \tag{7}$$

とかくことができ，成分 $\tau_{\alpha\beta}$ は，

$$\begin{aligned}&\tau_{11} = \tau_{22} = \tau_{33} = \tau_{44} = \cos\left(\frac{\phi}{2}\right),\\&\tau_{14} = -\tau_{23} = \tau_{32} = -\tau_{41} = -\sin\left(\frac{\phi}{2}\right),\\&\text{other} = 0\end{aligned}$$

である．つまり，$(\tau_{\alpha\beta})_{1\leqq\alpha\leqq4,1\leqq\beta\leqq4}$ は，

$$\begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) & 0 & 0 & -\sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \\ 0 & \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) & \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) & 0 \\ 0 & -\sin\left(\frac{\phi}{2}\right) & \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) & 0 \\ \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) & 0 & 0 & \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) \end{pmatrix}$$

と与えられる．

次に，$x_-(\alpha)$（$\theta = \eta$）となる場合について考察する．

この場合では，交換関係が，

$$\begin{aligned}&[q_i,\ q_j] = \mathrm{i}\alpha\epsilon_{ij},\\&[p_i,\ p_j] = \mathrm{i}\alpha\epsilon_{ij},\\&[q_i,\ p_j] = \mathrm{i}\delta_{ij},\\&\text{other} = 0 \quad (i,\ j = 1, 2)\end{aligned}$$

となる．このとき，$\alpha = \tanh(\phi)$ とすると，(7) においての変換行列 $T_\alpha = T_{\tanh(\phi)}$ は，

$$T_{\tanh(\phi)} = \sqrt{\operatorname{sech}(\phi)}\ (\tau_{\alpha\beta})_{1\leqq\alpha\leqq4,1\leqq\beta\leqq4} \tag{8}$$

とかくことができ，成分 $\tau_{\alpha\beta}$ は，

$$\begin{aligned}&\tau_{11} = \tau_{22} = \tau_{33} = \tau_{44} = \cosh\left(\frac{\phi}{2}\right),\\ &\tau_{14} = -\tau_{23} = -\tau_{32} = \tau_{41} = -\sinh\left(\frac{\phi}{2}\right),\\ &\text{other} = 0\end{aligned}$$

である．つまり，$(\tau_{\alpha\beta})_{1\leqq\alpha\leqq4,1\leqq\beta\leqq4}$ は，

$$\begin{pmatrix} \cosh\left(\frac{\phi}{2}\right) & 0 & 0 & -\sinh\left(\frac{\phi}{2}\right) \\ 0 & \cosh\left(\frac{\phi}{2}\right) & \sinh\left(\frac{\phi}{2}\right) & 0 \\ 0 & \sinh\left(\frac{\phi}{2}\right) & \cosh\left(\frac{\phi}{2}\right) & 0 \\ -\sinh\left(\frac{\phi}{2}\right) & 0 & 0 & \cosh\left(\frac{\phi}{2}\right) \end{pmatrix}$$

と与えられる．

これら2つの表式から，変換行列はリスケール因子と回転を表す部分とから成ることがわかる．ここで，$CL(2,2)$ のクリフォード代数を考えると，ガンマ行列は，

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= -\sigma_1 \otimes \sigma_3,\\ \gamma_2 &= \mathbb{1} \otimes \sigma_1,\\ \gamma_3 &= -\mathrm{i}\sigma_2 \otimes \sigma_3,\\ \gamma_4 &= \mathbb{1} \otimes \mathrm{i}\sigma_2\end{aligned}$$

と Pauli 行列を用いてかける．スピノルに対する Lorentz 変換は，ガンマ行列を用いて，

$$\Lambda = \exp\left(\frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu}\Sigma^{\mu\nu}\right) \tag{9}$$

と与えられる．このとき，$\Sigma_{\mu\nu}$ は，$\mu, \nu = 1, 2, 3, 4$ として，

$$\Sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{2}[\gamma_\mu, \gamma_\nu]$$

である．2つの可換・非可換変換行列 (7)，(8) の回転部分に対して Lorentz 変換 (9) を用いると，

$$\sqrt{\sec(\omega_{12})}\ \Lambda|_{1,2} \tag{10}$$

と

$$\sqrt{\operatorname{sech}(\omega_{23})}\ \Lambda|_{2,3} \tag{11}$$

のようにかき換えられる．　スケール因子 $\sqrt{\sec(\omega_{12})}$ と $\sqrt{\operatorname{sech}(\omega_{23})}$ は，座標と運動量の間の交換関係 $[q,\ p] = \mathbb{1}$ となるために必要となることがわかる．

3　Lorentz 変換-like な Bopp シフト

前節において，座標・座標の間の交換関係と 運動量・運動量の間の交換関係が $[q,\ q] = \pm[p,\ p]$ となる場合の変換行列を Lorentz 変換-like な表式で得た．本節では，座標のみ非可換な場合：

$$[q,\ q] \neq 0,\ [q,\ p] = \mathbb{1},\ \ [p,\ p] = 0$$

や，より一般的な場合：

$$[q,\ q] \neq [p,\ p] \neq 0,\ \ [q,\ p] = \mathbb{1}$$

も同様に，変換行列が Lorentz 変換 like な形でかくことができることを示す．

これまでに得られた 2 つの Lorentz 変換-like な変換行列 (10) と (11) を同時に用いて，$[q,\ q] \neq [p,\ p] \neq 0$，$[q,\ p] = \mathbb{1}$ の場合の変換行列は，

$$\sqrt{\sec(\omega_{12})\operatorname{sech}(\omega_{23})}\,\Lambda\,|_{1,2}\,\Lambda\,|_{2,3} \tag{12}$$

と

$$\sqrt{\sec(\omega_{12})\operatorname{sech}(\omega_{23})}\,\Lambda\,|_{2,3}\,\Lambda\,|_{1,2} \tag{13}$$

のように2通りの形で表すことができる．ここで，(12) 式を Υ_1 とし，

$$\Upsilon_1 = \left\{(\upsilon_1)_{\alpha\beta}\right\}_{1\leqq\alpha\leqq4,1\leqq\beta\leqq4}$$

とする．また，(13) 式を Υ_2 とし，

$$\Upsilon_2 = \left\{(\upsilon_2)_{\alpha\beta}\right\}_{1\leqq\alpha\leqq4,1\leqq\beta\leqq4}$$

とする．このとき，

$$\omega_{12} = 2\tan^{-1}\left\{-\tanh\left(\frac{\omega_{23}}{2}\right)\right\}$$

という条件[2]の下で，Υ_1 の成分は，

$$\begin{aligned}
(\upsilon_1)_{11} &= (\upsilon_1)_{22} = \sqrt{\cosh\left(\omega_{23}\right)}, \\
(\upsilon_1)_{33} &= (\upsilon_1)_{44} = \sqrt{\operatorname{sech}\left(\omega_{23}\right)}, \\
(\upsilon_1)_{14} &= -\left(\upsilon_1\right)_{23} \\
&= -\sqrt{\operatorname{sech}\left(\omega_{23}\right)}\ \sinh\left(\omega_{23}\right), \\
\text{other} &= 0
\end{aligned}$$

となり，Υ_2 の成分は，

$$\begin{aligned}
(\upsilon_2)_{11} &= (\upsilon_2)_{22} = \sqrt{\operatorname{sech}\left(\omega_{23}\right)}, \\
(\upsilon_2)_{33} &= (\upsilon_2)_{44} = \sqrt{\cosh\left(\omega_{23}\right)}, \\
(\upsilon_2)_{14} &= -\left(\upsilon_2\right)_{23} \\
&= -\sqrt{\operatorname{sech}\left(\omega_{23}\right)}\ \sinh\left(\omega_{23}\right), \\
\text{other} &= 0
\end{aligned}$$

となる．上記の結果が，座標のみ非可換の場合の変換行列に相当することは簡単に確認できる．

4 まとめ

非可換位相空間の量子力学を考える上で，非可換変数を可換・非可換変換を用いて可換変数で表すという方法が知られている．[44] および [45] において，非可換位相空間は最も単純な非可換の場合を考えれば十分であることが示された．この結果から，一般の非可換位相空間は 2 次元非可換位相空間と可換位相空間の直積で表せることがわかる．本論文では，2 次元非可換位相空間において，可換・非可換変数行列がスピノルに対する Lorentz 変換-like な形で表せることを示した．また，取り上げられることが多い座標のみが非可換となる非可換空間の場合の可換・非可換変数行列もスピノルに対する Lorentz 変換-like を 2 回作用させることで同様な形でかけることを示した．

本研究に関する応用例は，参考文献 [45] にある．

[2]本条件は，ω_{12} が Gudermannian 関数と等しくなるということである [43].

謝 辞

本研究の一部は，**「富山県立大学・2020 年度 および 2021 年度奨励研究費（萌芽）」**の助成を受けたものである。

付 録

可換・非可換変換の厳密表現 [46] について簡単に紹介する：

非可換変数 q_i，p_i と 可換変数 Q_i，P_i の間の変換：

$$\begin{cases}
q_i = \displaystyle\sum_{j=1}^{N}\left(a_{ij}\,Q_j + b_{ij}\,P_j\right), \\
p_i = \displaystyle\sum_{j=1}^{N}\left(c_{ij}\,Q_j + d_{ij}\,P_j\right)
\end{cases}$$

または，その行列表現として，

$$\begin{cases}
q = a\,Q + b\,P, \\
p = c\,Q + d\,P
\end{cases} \tag{14}$$

が成り立つとする．式 (14) を非可換変数の交換関係 (3) に代入し，可換変数の交換関係 (2) を用いることで，連立方程式：

$$\begin{aligned}
a\,b^{\mathrm{T}} - b\,a^{\mathrm{T}} &= \theta, \\
a\,d^{\mathrm{T}} - b\,c^{\mathrm{T}} &= \mathbb{1}, \\
c\,d^{\mathrm{T}} - d\,c^{\mathrm{T}} &= \eta
\end{aligned} \tag{15}$$

が得られる．ここで，$\mathbb{1}$ は単位行列とし，添字 T は転置行列とする．連立方程式 (15) において，係数行列 a，b，c，d の表式を得るために，以下の仮定:

$$\begin{aligned} a &= A(\theta\eta), \\ b &= B(\theta\eta)\,\theta, \\ c &= C(\eta\theta)\,\eta, \\ d &= D(\eta\theta) \end{aligned} \tag{16}$$

を課す．また，$[f(\theta\eta)]^{\mathrm{T}} = f(\eta\theta)$ が成り立ち，それぞれの関数が θ と η が "0" で連続である[3] ことを考慮する．このとき，仮定 (16) の下で，連立方程式 (15) は，

$$\begin{aligned} -[A(\theta\eta)\,B(\theta\eta) + B(\theta\eta)\,A(\theta\eta)]\,\theta &= \theta, \\ A(\theta\eta)\,D(\theta\eta) + B(\theta\eta)\,C(\theta\eta)\,\theta\,\eta &= \mathbb{1}, \\ \eta\,[C(\theta\eta)\,D(\theta\eta) + D(\theta\eta)\,C(\theta\eta)] &= \eta \end{aligned} \tag{17}$$

とできる[4]．そして，連立方程式 (17) から，以下の関係式：

$$\begin{aligned} A(\theta\eta)\,B(\theta\eta) &= -\frac{1}{2}\,\mathbb{1}, \\ C(\theta\eta)\,D(\theta\eta) &= \frac{1}{2}\,\mathbb{1}, \\ A(\theta\eta)\,D(\theta\eta) &= \frac{\mathbb{1} \pm \sqrt{\mathbb{1}+\theta\eta}}{2}, \\ B(\theta\eta)\,C(\theta\eta)\,\theta\,\eta &= \frac{\mathbb{1} \mp \sqrt{\mathbb{1}+\theta\eta}}{2} \end{aligned}$$

が得られる．この変換が，$\theta\eta = -\mathbb{1}$ のときに逆変換をもたないことは容易に確かめられる．さらに，変換 (14) が以下の表式：

$$\begin{cases} q = A(\theta\eta)\,Q - \dfrac{1}{2}\,\{A(\theta\eta)\}^{-1}\,\theta\,P, \\[2ex] p = D(\eta\theta)\,P + \dfrac{1}{2}\,\{D(\eta\theta)\}^{-1}\,\eta\,Q, \\[2ex] A(\theta\eta)\,D(\theta\eta) = \dfrac{\mathbb{1} + \sqrt{\mathbb{1}+\theta\eta}}{2} \end{cases}$$

をもち，逆変換が，

$$\begin{cases} Q = \left(\sqrt{\mathbb{1}+\theta\eta}\right)^{-1}\{D(\theta\eta)\,q \\ \qquad\qquad + \dfrac{1}{2}\,(A(\theta\eta))^{-1}\,\theta\,p\}, \\[2ex] P = \left(\sqrt{\mathbb{1}+\eta\theta}\right)^{-1}\{A(\eta\theta)\,p \\ \qquad\qquad - \dfrac{1}{2}\,(D(\eta\theta))^{-1}\,\eta\,q\} \end{cases}$$

となることがわかる．この変換は，任意の非可換パラメータ θ, η をもつ非可換位相空間と "普通" の位相空間を関係付けるもので，$\theta \to 0$ かつ $\eta \to 0$ において可換極限をもつことは容易に確認できる．

[3] 非可換パラメータ θ と η は小さいと考えられるので，関数 A，B，C，D は "0" において連続であると仮定した．

[4] 任意の解析関数 X について，$X(\theta\eta)\theta = \theta X(\eta\theta)$ と $X(\eta\theta)\eta = \eta X(\theta\eta)$ が成立する．

参考文献

[1] N. Seiberg and E. Witten; *JHEP*, **9**, 032 (1999).

[2] C. Bastos and O. Bertolami; *Phys. Lett.*, **A 372**, 5556 (2008).

[3] O. Bertolami and C. Zarro; *Phys. Lett.*, **B 673**, 83 (2009).

[4] A. Connes, M. Douglas and A. S. Schwarz; *JHEP*, **2**, 003 (1998).

[5] C. S. Chu and P. M. Ho; *Nucl. Phys.*, **B 550**, 151 (1999).

[6] C. S. Chu and P. M. Ho; *Nucl. Phys.*, **B 568**, 447 (2000).

[7] F. Ardalan, H. Arfaei and M. M. Sheikh-Jabbari;
Nucl. Phys., **B 576**, 578 (2000).

[8] J. Jing and Z.-W. Long;
Phys. Rev., **D 72**, 126002 (2005).

[9] H. O. Girotti;
`hep-th/0301237`.

[10] M. Chaichian, A. Demichev, P. Presnajder, M. M. Sheikh-Jabbari and A. Tureanu;
Nucl. Phys., **B 611**, 383 (2001).

[11] M. Chaichian, A. Demichev, P. Presnajder, M. M. Sheikh-Jabbari and A. Tureanu;
Phys. Lett., **B 527**, 149 (2002).

[12] M. Chaichian, M. M. Seikh-Jabbari and A. Tureanu;
Phys. Rev. Lett., **86**, 2716 (2001).

[13] M. R. Douglas and N. A. Nekrasov;
Rev. Mod. Phys., **73**, 977 (2001).

[14] M. Van Raamsdonk and N Seiberg;
JHEP, **3**, 035 (2000).

[15] R.J. Szabo;
Phys. Rept., **378**, 207 (2003).

[16] R. Gopakumar, S. Minwalla and A. Strominger;
JHEP, **5**, 020 (2000).

[17] S. Minwalla, M. Van Raamsdonk and N. seiberg;
JHEP, **2**, 020 (2000).

[18] A. Smailagic and E. Spallucci;
Phys. Rev., **D 65**, 107701 (2002).

[19] B. Morariu and A. P. Polychronakos;
Nucl. Phys., **B 610**, 531 (2001).

[20] B. Morariu and A. P. Polychronakos;
Nucl. Phys., **B 634**, 326 (2002).

[21] B. Muthukumar and P. Mitra;
Phys. Rev., **D 66**, 027701 (2002).

[22] F. Delduc, Q. Duret, F. Gieres and M. Lefrançois;
J. Phys. Conf. Ser., **103** 012020 (2008).

[23] G. V. Dunne, J. Jackiw and C. Trugenberger;
Phys. Rev., **D 41**, 661 (1990).

[24] J. Gamboa, M. Loewe and J. Rojas;
Phys. Rev., **D 64**, 067901 (2001).

[25] J. Gamboa, M. Loewe, F. Mendez and J. Rojas;
Mod. Phys. Lett., **A 16**, 2075 (2001).

[26] J. Gamboa, M. Loewe, F. Mendez and J. Rojas;
Int. J. Mod. Phys., **A 17**, 2555 (2002).

[27] K. Bolonek and P. Kosiński;
Phys. Lett., **B 547**, 51 (2002).

[28] L. Kang, J. Wang and C. Cheni;
Mod. Phys. Lett., **A 20**, 2165 (2005).

[29] L. Mezincescu;
`hep-th/0007046`.

[30] M. Demetrian and D. Kochan; *Acta Phys. Slov.*, **52**, 1 (2002).

[31] O. Bertolami, J.G. Rosa, C. Aragão, P. Castorina and D. Zappalà; *Mod. Phys. Lett.*, **A 21**, 795 (2006).

[32] P. Kosiński and K. Bolonek; *Acta Phys. Polon.*, **B34**, 2575 (2003).

[33] S.M. Carroll, J.A. Harvey, V.A. Kostelecky, C.D. Lane and T. Okamoto; *Phys. Rev. Lett.*, **87**, 141601 (2001).

[34] S. Dey, A. Fring, L. Gouba and P.G. Castro; *Phys. Rev.*, **D 87**, 084033 (2013).

[35] S. Dey; *Phys. Rev.*, **D 91**, 044024 (2015).

[36] S. Dey, A. Fring and V. Hussin; *Int. J. Mod. Phys.*, **B 31**, 1650248 (2017).

[37] S. Dey, A. Fring and V. Hussin; *Springer Proc. Phys.*, **205**, 209 (2018).

[38] V.P. Nair and A.P. Polychronakos; *Phys. Lett.*, **B 505**, 267 (2001).

[39] J.-Z. Zhang; *Phys. Lett.*, **B 584**, 204 (2004).

[40] A.A. Deriglazov; *Phys. Lett.*, **B 530**, 235 (2002).

[41] A.A. Deriglazov; `hep-th/0208072`.

[42] L. D. Landau and E. M. Lifshitz; *Mechanics*, **3rd Edition** (1982).

[43] Gudermannian 関数 $\mathrm{gd}\,x$；

$$\begin{aligned}\mathrm{gd}\,x &\equiv \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\cosh t}\\ &= 2\tan^{-1}\left\{\tanh\left(\frac{x}{2}\right)\right\}.\end{aligned}$$

[44] M. Nakamura and H. Kakuhata; `arXiv:1403.2171`.

[45] M. Nakamura, H. Kakuhata and K. Toda; *J. Geom. Symmetry Phys.*, **22**, 188 (2021).

[46] 中村誠・角畠浩・戸田晃一; 富山県立大学紀要, **第 31 巻**, 6 (2021).

An exact representation of noncommutative phase space II.

Makoto Nakamura*, Hiroshi Kakuhata† and Kouichi TODA*‡

Summary

Noncommutative phase space of arbitrary dimension is considered. The both of operators in coordinates and momenta on noncommuta -tive phase space may be noncommutative.

In this paper, we introduce momentum-momentum noncommuta -tivity in addition to coordinate-coordinate one. And we find some matrix forms for the linear coordinate transformations, which relate a noncommutative phase space to the corresponding ordinary one.

Key Words: *Quantum mechanics on noncommutative phase space, Mathematics on quantum mechanics*

*Faculty of Engineering, Toyama Prefectural University
†Faculty of Engineering, University of Toyama
‡Research and Education Center for Natural Sciences, Keio University